El conocimiento matemático especializado de los futuros maestros para la enseñanza de las fracciones.

Un estudio de casos.

Autora: Ana González

Facultad de Ciencias Humanas

Departamento de Educación

Maestría en Educación con énfasis en Currículum y Evaluación

Tutora: Gabriela Otheguy

Montevideo, 6 de Octubre de 2021

Índice

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES V

ÍNDICE DE TABLAS VII

1 RESUMEN VIII

2 ABSTRACT IX

3 MOTIVACIÓN PERSONAL 1

4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 3

4.1 EL CURRÍCULO MATEMÁTICO MAGISTERIAL EN URUGUAY 3
4.2 EL CURRÍCULO MATEMÁTICO ESCOLAR EN URUGUAY 6
4.3 CURRÍCULO MAGISTERIAL VS. CURRÍCULO ESCOLAR 7

5 ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN 10

5.1 ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN 11
5.1.1 El Concepto de Fracción o Número Racional *11*
5.1.2 Enseñanza del Concepto de Fracción y el Conocimiento Docente *14*
5.2 OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN 17
5.2.1 Objetivo General *18*
5.2.2 Objetivos Específicos *18*

6 MARCO TEÓRICO 20

6.1 ANTECEDENTES DEL MODELO MTSK 20
6.2 ALGUNAS VENTAJAS DEL MODELO MTSK FRENTE AL MKT 27
6.3 EL MODELO MTSK 28
6.3.1 Conocimiento Matemático (MK) *30*
6.3.1.1 Conocimiento de los Temas (KoT) 30
6.3.1.2 Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM) 31
6.3.1.3 Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) 32
6.3.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) *33*
6.3.2.1 Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT) 33
6.3.2.2 Conocimiento de las Características del Aprendizaje de la Matemática (KFLM) 34
6.3.2.3 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de la Matemática (KMLS) 35
6.4 EL CONCEPTO DE FRACCIÓN 36
6.5 LA FRACCIÓN COMO RELACIÓN PARTE-TODO 39
6.5.1 Distintas Representaciones Para la Relación Parte-Todo *41*
6.5.2 Naturaleza de la Unidad y Tipo de Magnitud Para la Relación Parte-Todo *42*

6.6 DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES COMO RELACIÓN PARTE-TODO 43
6.7 ADAPTACIÓN DEL MODELO MTSK A LOS OBJETIVOS 49

7 METODOLOGÍA 53

7.1 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN 53
7.2 POBLACIÓN Y MUESTREO 55
7.3 FASES DEL TRABAJO 56
7.4 RECOLECCIÓN DE DATOS 57
7.4.1 Instrumentos 57
7.4.1.1 Entrevista1: Exploratoria a Expertos 57
7.4.1.2 Cuestionario 1: A Estudiantes Avanzados de Magisterio 58
7.4.1.3 Entrevista 2: A Estudiantes Avanzados de Magisterio 61

8 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS 67

8.1 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO 1 67
8.1.1 Análisis General del Cuestionario 1: Conocimiento de los Temas (KoT) 68
8.1.1.1 Bloque 1 69
8.1.1.2 Bloque 2 72
8.1.1.3 Bloque 3 74
8.1.1.4 Bloque 4 76
8.1.1.5 Bloque 5 78
8.1.1.6 Bloque 6 81
8.1.1.7 Bloque 7 83
8.1.1.8 Bloque 8 85
8.1.1.9 Bloque 9 89
8.1.2 Preguntas donde los estudiantes suelen fallar: Cuestionario 1 91
8.2 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA 2 92
8.3 ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS OBTENIDAS EN LA ENTREVISTA 2 93
8.3.1 Conocimiento de los futuros maestros sobre estrategias aplicadas por estudiantes escolares al usar el concepto de fracción 94
8.3.2 Conocimiento de dificultades o errores comunes a priori 99
8.3.3 Conocimiento de dificultades o errores comunes a partir de producciones de escolares 100
8.3.4 Conocimiento sobre imagen conceptual de la fracción 108
8.3.5 Conocimiento matemático presente en la entrevista 113
8.4 CONCLUSIONES FINALES 118
8.5 LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN 123
8.6 FUTURAS INVESTIGACIONES 123

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 125

1 ANEXOS 131

1.1 ANEXO: ENTREVISTA A EXPERTOS ... 131

1.1.1 Respuestas Dadas a la Entrevista por Parte de los Expertos y análisis ... 131

1.1.1.1 Extracto de las respuestas ... 131

1.1.1.2 Entrevista 1 completa ... 134

1.1.1.3 Entrevista 2 completa ... 140

1.2 ANEXO: NÚMERO RACIONAL EN EL PLAN 2008 (CURRÍCULO ESCOLAR) ... 147

1.3 ANEXO: CUESTIONARIO 1 ... 149

1.4 ANEXO: ENTREVISTA 2 ... 159

1.5 ANEXO: TABLA DE EGRESOS EN LA CARRERA MAGISTERIO A NIVEL PAÍS. ... 162

1.6 ANEXO: DISTRIBUCIÓN DE PUNTUACIONES OBTENIDAS EN EL CUESTIONARIO 1 ... 163

1.7 ANEXO: DATOS RECOGIDOS EN LA ENTREVISTA 2 ... 163

1.7.1 Extractos de las entrevistas según indicador ... 163

1.7.1.1 Indicador: Conoce errores o dificultades a priori (subdominio KFLM) ... 163

1.7.1.2 Indicador: Reconoce, en las respuestas de estudiantes escolares, errores o dificultades comunes (Respuesta de Víctor, subdominio KFLM) ... 165

1.7.1.3 Indicador: Reconoce, en las respuestas de estudiantes escolares, errores o dificultades comunes (Respuesta de Tere, subdominio KFLM) ... 169

1.7.1.4 Indicador: Reconoce, en las respuestas de estudiantes escolares, errores o dificultades comunes (respuesta de Álvaro, subdominio KFLM) ... 175

1.7.1.5 Indicador: Identifica imágenes de un concepto en producciones de escolares (Respuesta de Víctor, subdominio KFLM) ... 179

1.7.1.6 Indicador: Identifica imágenes de un concepto en producciones de escolares (Respuesta de Tere, subdominio KFLM) ... 190

1.7.1.7 Indicador: Conoce procesos y estrategias que aplican los estudiantes al enfrentarse a una actividad matemática (subdominio KFLM) ... 193

1.7.1.8 Indicador: Dificultad independencia de la forma presente en las respuestas de los propios entrevistados (subdominio KOT) ... 199

1.7.1.9 Indicador: Dificultad en representaciones equivalentes presentes en las respuestas de los entrevistados (subdominio KoT) ... 201

1.7.1.10 Indicador: Dificultad en representaciones discretas presentes en las respuestas de los propios entrevistados (subdominio KoT) ... 206

Índice de Ilustraciones

FIGURA 1: DIMENSIONES DEL MODELO MTSK (CONTRERAS, MONTES, CLIMENT, & CARRILLO, 2017) 29
FIGURA 2: TANGRAM 34
FIGURA 3: EQUIDAD DE LAS PARTE 35
FIGURA 4: RELACIONES ENTRE LAS INTERPRETACIONES DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN (BEHR ET AL., 1983, P.100) 39
FIGURA 5: *REPRESENTACIONES DE LA RELACIÓN PARTE-TODO (LESH, 1983) CITADO EN LLINARES Y SÁNCHEZ (1997)* 41
FIGURA 6: DIFICULTAD REFERENTE AL CONTEO DE PARTES 45
FIGURA 7: DIFICULTAD SOBRE LA INDEPENDENCIA DE LA FORMA 46
FIGURA 8: *DIFICULTAD EQUIDAD DE LAS PARTES* 46
FIGURA 9: ERROR AL REPRESENTAR FRACCIONES MAYORES A LA UNIDAD 46
FIGURA 10: DIFICULTAD 47
FIGURA 11: *DIFICULTAD REFERENTE AL NÚMERO DE PARTES Y TAMAÑO* 47
FIGURA 12: DIFICULTAD REFERENTE A REPRESENTACIONES EQUIVALENTES 48
FIGURA 13: PARTES COMO TOTALIDAD Y EQUIVALENCIA DE FRACCIONES 48
FIGURA 14: DIFICULTAD MAGNITUDES DISCRETAS 49
FIGURA 15: *ADAPTACIÓN DEL MODELO MTSK A LOS OBJETIVOS (ELABORACIÓN PROPIA)* 50
FIGURA 16: PREGUNTA 1.1 Y 1.2 70
FIGURA 17: PREGUNTAS 1.3 Y 1.4 71
FIGURA 18: PREGUNTAS 2.1 Y 2.2 73
FIGURA 19: PREGUNTA 3.1 75
FIGURA 20: PREGUNTA 3.2 75
FIGURA 21: PREGUNTA 4.1 77
FIGURA 22: PREGUNTA 4.2 78
FIGURA 23: PREGUNTA 5.1 79
FIGURA 24: PREGUNTA 5.2 80
FIGURA 25: PREGUNTA 6.1 82
FIGURA 26: PREGUNTA 6.2 83
FIGURA 27: PREGUNTA 7.1 84
FIGURA 28: PREGUNTA 7.2 85
FIGURA 29: PREGUNTA 8.1 86
FIGURA 30: PREGUNTA 8.2 88
FIGURA 31: PREGUNTA 9.1 90
FIGURA 32: ACTIVIDAD DE ENTREVISTA 95
FIGURA 33: RESPUESTA DE VÍCTOR 101
FIGURA 34: RESPUESTA DE TERE 103
FIGURA 35: RESPUESTA DE ÁLVARO 106

FIGURA 36: REPRESENTACIÓN DISCRETA 115

Índice de Tablas

TABLA 1: CARGA HORARIA DE MATEMÁTICA EN LA CARRERA DE MAGISTERIO (PLAN 2008) 4
TABLA 2: NÚMERO RACIONAL EN EL PLAN 2008 DEL CEIP 7
TABLA 3: *ANTECEDENTES* 10
TABLA 4: *COMPARACIÓN DE LAS DIMENSIONES DE LOS DISTINTOS MODELOS DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR* 26
TABLA 5: *SITUACIONES EN LAS QUE SE VISUALIZA LA RELACIÓN PARTE-TODO* 42
TABLA 6: *ADAPTACIÓN DEL SUBDOMINIO KOT A LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN* 50
TABLA 7: *ADAPTACIÓN DEL SUBDOMINIO KFLM A LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN* 51
TABLA 8: *DIFICULTADES PRESENTES EN LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA RELACIÓN PARTE-TODO* 52
TABLA 9: *ESQUEMA DEL TRABAJO* 57
TABLA 10: *OBJETIVOS DE LOS ÍTEMS DEL CUESTIONARIO 1 Y VARIABLES INVOLUCRADAS* 61
TABLA 11: *CARACTERÍSTICAS DE LAS RESPUESTAS DE LOS TRES NIÑOS* 63
TABLA 12:*CATEGORÍAS E INDICADORES DE LA DIMENSIÓN KOT PRESENTES EN LOS DISTINTOS BLOQUES DEL CUESTIONARIO 1* 68
TABLA 13: *DISTRIBUCIÓN DE PUNTAJES* 69
TABLA 14: *CUESTIONARIO 1,BLOQUE 1* 70
TABLA 15: *CUESTIONARIO 1, BLOQUE 2* 72
TABLA 16: *CUESTIONARIO 1, BLOQUE 3* 74
TABLA 17: *CUESTIONARIO 1, BLOQUE 4* 76
TABLA 18: *CUESTIONARIO 1, BLOQUE 5* 78
TABLA 19: *CUESTIONARIO 1, BLOQUE 6* 81
TABLA 20: CUESTIONARIO 1, BLOQUE 7 83
TABLA 21: *CUESTIONARIO 1, BLOQUE 8* 86
TABLA 22: *CUESTIONARIO 1, BLOQUE 9* 89
TABLA 23: *CUESTIONARIO 1, PREGUNTAS DONDE SE SUELE FALLAR* 91
TABLA 24: *RESPUESTAS A LA PREGUNTA 1 -ENTREVISTA* 95
TABLA 25: *RESUMEN DE ESTRATEGIAS* 99
TABLA 26: *DIFICULTADES RECONOCIDAS EN RESPUESTAS DE ESCOLARES* 108
TABLA 27: *IMAGEN CONCEPTUAL, VÍCTOR* 111
TABLA 28: *IDENTIFICACIÓN DE IMAGEN CONCEPTUAL* 113
TABLA 29: *RESPUESTAS A LA PREGUNTA 9.1 CUESTIONARIO 1 Y APORTES DE LA ENTREVISTA* 118
TABLA 30: ENTREVISTA A EXPERTOS 131
TABLA 31: NÚMERO RACIONAL EN EL PLAN 2008 DEL CEIP 147
TABLA 32: OPERATORIA CON NÚMEROS RACIONALES EN EL PLAN 2008 DEL CEIP 148

1 Resumen

El presente trabajo de investigación, consiste en la exploración y descripción del *conocimiento matemático y didáctico* que poseen los estudiantes avanzados de magisterio de un instituto público de Montevideo, para enseñar el concepto de *fracción* en su interpretación *parte-todo*. En cuanto a este tema, algunos investigadores como Martínez y Lascano (2001), Obando (2003), Fandiño Pinilla (2007) y Pazos (2009) han explorado las dificultades que atraviesan los estudiantes al trabajar y aplicar el concepto de fracción. Mientras que otros investigadores, tales como Rojas et al. (2015), Ivars et al. (2016) y González Retana y Eudave Muñoz (2018), han centrado su interés en indagar sobre el conocimiento que es necesario que tenga un docente para enseñar matemática y en particular, el concepto de fracción.

Para llevar adelante la investigación decidimos optar por un estudio de casos con un enfoque exploratorio- descriptivo, que implicó el uso de una metodología de carácter mixto. En este sentido, el trabajo requirió la aplicación de un cuestionario sobre conocimiento matemático y la realización de una serie de entrevistas que permitieron explorar tanto el conocimiento matemático como el didáctico.

Finalmente, a partir de los datos y del análisis que se realiza de ellos en las diferentes etapas, se obtuvieron diversos hallazgos en cuanto al conocimiento didáctico y matemático de los futuros maestros. En particular, se recogen evidencias que ponen de manifiesto las dificultades reportadas por Martínez y Lascano (2001), Obando (2003) y Pazos (2009).

2 Abstract

This investigation explores and describes the mathematical and didactic knowledge required to teach the concept of fraction and its interpretation as part-whole, possessed by advanced teacher-training students from a public educational institution in Montevideo. Some researchers like Martínez and Lascano (2001), Obando (2003), Fandiño Pinilla and Pazos (2009) have explored the difficulties experienced by students when learning and applying the concept of fraction. Other researchers, on the other hand, have focused their interest on inquiring about the knowledge a teacher needs to teach mathematics, particularly the concept of fraction.

In order to carry out this investigation we decided to conduct an explorative-descriptive case study, with a mixed methodology. A poll about mathematical knowledge and a series of interviews were implemented, allowing us to explore both mathematical and didactic knowledge.

Finally, using the data and analysis about it in different stages, several findings were made regarding the didactic and mathematical knowledge possessed by apprentice teachers. We focused particularly on the evidence which illustrates the difficulties shown by Martínez and Lascano (2001), Obando (2003) and Pazos (2009).

3 Motivación personal

Desde el inicio de mi carrera como Profesora de Educación Media, en la especialidad Matemática, he trabajado como docente en los primeros cursos de educación media básica. La práctica en estos cursos me ha permitido detectar algunos conceptos que resultan especialmente difíciles para los estudiantes de secundaria, tales como son los conceptos de: fracción y número racional. Estos conceptos, se supone, son trabajados por parte de los estudiantes y maestros a nivel básico en la escuela. La experiencia me ha permitido detectar que, en muchos casos, las nociones previas adquiridas entorno a los conceptos de fracción y número racional son difusas e incompletas lo que conduce, a los estudiantes, a una serie de dificultades. Por ejemplo, en primer año de secundaria, los alumnos, presentan dificultades para representar gráficamente fracciones mayores a la unidad. En general, los estudiantes interpretan a la fracción $\frac{a}{b}$ como una relación parte todo donde de “b” cantidad de partes iguales de un todo tienen que pintar “a” partes. Ese concepto, que han construido durante su trayectoria escolar, funciona bien al representar gráficamente fracciones menores a la unidad, pero no funciona en las fracciones mayores a la unidad, pues en este caso deben de pintar más partes de las que tienen disponibles.

Varias de las dificultades, a las que se enfrentan los estudiantes al trabajar con los conceptos antes mencionados, he podido observar que están relacionadas con las diferentes formas de enseñanza por parte de los maestros en la escuela y por parte de los profesores en secundaria. En este sentido, podemos ver que en la escuela se realiza un trabajo más concreto con los conceptos mientras que en secundaria se los trabaja de forma más abstracta. Sin embargo, hay otras dificultades que revisten una problemática mayor y es difícil identificar la o las causas que las generan. Este hecho motivó mi interés por conocer cómo era la formación de los futuros maestros. Es así que comencé a trabajar como profesora en la carrera de magisterio impartiendo matemática, pero a nivel de formación de maestros.

El trabajo como docente en la formación profesional de maestros me ha permitido conocer diversos problemas que los futuros maestros atraviesan al cursar la carrera. Algunos de estos problemas están relacionados con la propia asignatura matemática y otros con el plan de estudios. En particular, destaco dos problemas que llamaron mi atención y los describo a continuación.

El primer problema está relacionado con la formación matemática ya que los futuros maestros muestran muchas dificultades en la adquisición de los conceptos matemáticos, conceptos que luego deberán enseñar. De hecho, son pocos los estudiantes que, teniendo la oportunidad de aprobar la materia durante el curso, lo logran. El segundo problema que detecté está relacionado con la práctica docente pues los futuros maestros no cuentan en su formación con una asignatura específica de didáctica de la matemática. En algunas oportunidades los estudiantes recurrían al docente de matemática para consultar aspectos relacionados con problemas didácticos de los contenidos pues eran problemas que surgían en sus propias prácticas docentes.

El trayecto profesional como docente de secundaria, como formadora de futuros maestros y las dificultades que fui mencionado anteriormente es lo que me conduce a interesarme por la formación matemática y didáctica de los estudiantes avanzados de magisterio. En este sentido, me pregunto ¿están los futuros maestros preparados matemática y didácticamente para trabajar los conceptos de fracción y número racional?, ¿las dificultades que se visualiza en los estudiantes de secundaria en cuanto a los conceptos de fracción y número racional tendrán su origen en las dificultades de los futuros maestros?

Finalmente, al indagar y buscar trabajos relacionados con los problemas que se describieron aquí, se encuentra que en Uruguay son escasas las investigaciones en dicha temática mientras que en otros países la comunidad de investigadores en educación se ha comenzado a interesar por la formación profesional matemática de los futuros docentes. En el capítulo que sigue se plantea el problema de investigación y se realiza una revisión de los aportes más relevantes de la literatura.

4 Planteamiento del Problema

En este capítulo se presenta el problema de investigación y su fundamentación. Para ello se desarrollan distintos aspectos del curriculum matemático escolar y magisterial pues son fundamentales para el planteo del problema.

Es importante destacar que en el currículum magisterial y escolar hay algunos datos que no se detallan, por lo que fue necesario hacer una entrevista a expertos con el fin de profundizar y complementar la fundamentación que se presenta en este capítulo. Las entrevistas completas se pueden ver en el anexo1.1.

4.1 El Currículo Matemático Magisterial en Uruguay

En Uruguay el plan que se encuentra vigente para la formación magisterial es el denominado Plan Nacional Integrado de Formación Docente 2008 (en adelante Plan 2008). Este plan comienza a implementarse en los centros de formación docente en el año 2008.

Los documentos oficiales, que establecen la estructura y justificación del Plan 2008, se elaboran en los años anteriores, obteniendo el documento final en el año 2007. En estos documentos oficiales se reporta la malla curricular y carga horaria de cada asignatura. En este sentido, se describe la existencia de dos materias específicas en el área de matemática, a saber: *Matemática I* en primer año, con una carga horaria de 4 horas semanales y *Matemática II* en segundo año, con una carga horaria de 3 horas semanales (CFE, 2007, p.26). En el tercer año de la carrera se cuenta con una materia denominada *Taller de profundización teórica y apoyo a la práctica docente en matemática*, con una carga horaria de 30 horas anuales (CFE, 2007, p.26).

Por otra parte, en los documentos aportados por CFE (2007) sobre el Plan 2008, se obtiene información sobre la carga horaria total de docencia directa que demanda la carrera, sin tener en cuenta las distintas asignaturas, y cuántas de estas horas está dedicadas al dictado de matemática. En primer año de la carrera se dispone de 34 horas de docencia directa semanales y en particular 4 horas son destinadas al dictado de matemática (CFE, 2007, p.20). En segundo año de la carrera se cuenta con 31 horas de clase de docencia directa, de las cuales 3 son dedicadas al dictado de matemática (CFE, 2007, p.20). En tercer año de la carrera se dispone de 31 horas de docencia directa semanales y de un taller de matemática semestral de 30 horas anuales (aproximadamente 1 hora semanal) (CFE, 2007, p.20). Y finalmente, en cuarto año de la carrera se cuenta con 22 horas de docencia directa de las cuales ninguna es de matemática (CFE, 2007, p.20).

Teniendo en cuenta que el año escolar para la carrera de magisterio tiene aproximadamente treinta semanas podríamos calcular, de forma estimada, la carga horaria de docencia directa que implica la realización de cada año (ver Tabla 1). Sumando las anteriores obtenemos un total de 3540 horas de docencia directa para toda la carrera, de las cuáles 240 horas fueron destinadas al dictado de matemática. Es decir que un 6.8% de la carga horaria total de la carrera está programado para el trabajo matemático, esto es sin tener en cuenta la carga horaria que se dispone para la práctica docente. Claro está que, si se tuvieran en cuenta las horas de práctica para el cálculo del porcentaje anterior, este sería inferior. A continuación, se resume en la Tabla 1 la información antes expuesta, cabe destacar que la tabla es de construcción personal.

Tabla 1: *Carga horaria de matemática en la carrera de magisterio (plan 2008)*

Año de la carrera	**1ero**	**2do**	**3ero**	**4to**	**Total**
Total de horas de docencia directa anuales	1020	930	930	660	3540
Total de horas de matemática	120	90	30	0	240
Porcentaje aproximado (%)					6,8

Nota. La carga horaria semanal del taller, se calcula tomando en cuenta un aproximado de las semanas disponibles de clase (30 semanas anuales).

Fuente: Tabla de elaboración propia.

Con el fin de profundizar y corroborar algunos de los aspectos que aquí son señalados se realizó una entrevista a dos expertos en formación matemática magisterial. Dichos expertos son conocidos por su amplia trayectoria en la formación de maestros y por sus significativos aportes al campo educativo. En lo que sigue, para guardar la identidad de los entrevistados, se los llamará Entrevistado 1 (Ex 1) y Entrevistado 2 (Ex 2). Las entrevistas completas se encuentran en el anexo 1.1.

En dicha entrevista se les consultó a los expertos si consideraban que la carga horaria destinada a la enseñanza de la matemática en magisterio era suficiente. Frente a esta pregunta el Ex 1 contestó que sin dudas la carga horaria era insuficiente. En relación a este problema agregó que la gran carga horaria que tienen actualmente en la carrera haría difícil la inclusión de más horas de matemática. En dicha respuesta Ex 1 agregó que sería recomendable realizar una revisión de qué contenidos y habilidades matemáticas son necesarias que desarrolle un maestro para la puesta en práctica de su profesión (Ex 1, 2020).

Para la misma pregunta el Ex 2 indicó que aumentar la carga horaria de matemática I o matemática II no solucionaría las dificultades que atraviesan los estudiantes magisteriales a la hora del trabajo matemático pues, según su mirada, sería necesario incluir en la carrera magisterial horas de didáctica de la matemática. En este sentido, el Ex 2 reporta que los futuros maestros enfrentan una gran responsabilidad profesional, que les demandará trabajar todos los días parte de la jornada escolar en la enseñanza de matemática. Asimismo, se señala que sería deseable una formación inicial en la carrera de magisterio que refleje las exigencias profesionales que atravesarán los futuros maestros (Ex 2, 2020).

En resumen, ambos expertos acuerdan en que la carga horaria destinada a la enseñanza de la matemática en la carrera es escasa. En particular, el Ex 2 manifiesta la necesidad de que se cuente, en el plan de estudios, con enseñanza en el área de didáctica de la matemática. Cabe destacar que, dentro de la malla curricular de magisterio, no existe una asignatura específica en el área de Didáctica de la Matemática. Las didácticas presentes del Plan 2008 son generales, contando únicamente con la práctica docente para desarrollar algunos conocimientos didácticos en cuanto a la enseñanza de la matemática.

Sumando a lo mencionado en el párrafo anterior, los expertos fueron consultados por la formación didáctica de los maestros, en relación a esto se les preguntó: ¿Poseen los futuros maestros formación específica en el área de didáctica de matemática?, ¿Quién está a cargo de la formación didáctica de los futuros maestros?, ¿Qué opinión te merece la formación didáctica de los futuros maestros?

En relación a las preguntas anteriores el Ex 1 y el Ex 2 manifestaron que la formación didáctica, en todas las áreas, está a cargo de la directora de la escuela de práctica. Ambos entrevistados señalan que dicha formación es escasa y que no es recomendable que los directores de escuela la tengan a su cargo (Ex 1 y Ex 2, 2020). En relación a esto el Ex 2 destaca que "(...) un sólo profesional no tiene la capacidad, por más experto que sea, de tener bajo su ala la responsabilidad de formar en todas las didácticas específicas. Porque el objeto de conocimiento cambia de base (...)" (2020).

A partir de la opinión de los expertos, podemos inferir que existen dificultades en la formación matemática de los futuros maestros. En particular, se señala la necesidad de la existencia de una formación específica en cuando a didáctica de la matemática por parte de un experto en la materia.

A continuación, se analiza el extenso currículo matemático que tienen a cargo los futuros maestros para su enseñanza. Este análisis sumado a los aportes expuestos en esta sección es lo que posteriormente permite establecer las preguntas de investigación y objetivos del presente trabajo.

4.2 El Currículo Matemático Escolar en Uruguay

Los estudiantes escolares de Uruguay cuentan para su formación con el Programa de Educación Inicial y Primaria 2008 (en adelante Programa 2008). Este programa es aprobado con carácter experimental, en el mes de diciembre de 2008, por lo que se implementa únicamente en algunos centros. Posteriormente el programa es revisado, entrando en vigencia para todas las escuelas en marzo del año 2009. Es importante aclarar que los documentos oficiales del Programa 2008, que se encuentran disponibles, son del año 2013 por ser la tercera edición del documento original.

Los maestros, en el ejercicio de su profesión, deben trabajar con el Programa 2008 dispuesto en los documentos oficiales del CEIP (2013). Dicho documento muestra una gran cantidad de contenidos matemáticos que se espera sean adquiridos por los estudiantes de primaria. En particular, el desarrollo de la aritmética y el tratamiento del concepto de fracción, ocupan un lugar central en el currículo escolar, aspecto que se describe más adelante en este documento. Como expresa Maz y Gutiérrez (2008) citado en León-Mantero et al. (2016) "La aritmética ocupa un lugar significativo en la formación de las personas, ya que su comprensión es fundamental para poder extender los conocimientos matemáticos" (p.1). El currículo escolar uruguayo no es ajeno a lo mencionado anteriormente. En tal sentido podemos ver que el concepto de fracción y por ende, la construcción del número racional está presente en los programas de primaria desde edades muy tempranas (ver tablas de resumen de los programas escolares en Anexo 2).

En los programas oficiales de primaria el curriculum matemático, de cada nivel, se encuentra dividido en seis bloques temáticos, a saber: Numeración, Operaciones, Magnitudes y Medida, Estadística y Probabilidad, Álgebra y Geometría (CEIP, 2013). El trabajo con fracciones y específicamente con número racional se encuentra a lo largo de los diferentes bloques, pero tiene mayor presencia en los bloques Numeración y Operaciones. A continuación, se presenta una tabla, de creación personal, donde se podrán observar los contenidos principales sugeridos para el trabajo con números racionales presentes en el bloque. En caso de querer consultar todos los contenidos que se encuentran en el bloque Numeración y Operaciones en el programa matemático escolar se puede consultar el Anexo 2, donde se detallan con mayor profundidad los contenidos y se agregan además los contenidos relacionados con operaciones.

Tabla 2: *Número racional en el plan 2008 del CEIP*

Nivel escolar		**Contenidos**
Tres años	**Racionales**	La relación parte–todo en cantidades discretas. El todo dividido en partes iguales (dos).
Cuatro años		La relación parte–todo en cantidades discretas y continuas. La noción de partes equivalentes en contextos continuos.
Cinco años		La noción de partes congruentes en la división de la unidad (discreta o continua). La noción de mitad y mitades. La representación numérica.
1er grado		La fracción como número: ½. Fracción de conjunto y de unidad. La composición y descomposición de la unidad con: medios, cuartos.
2do grado		Las fracciones equivalentes, menores y mayores a la unidad. La composición y descomposición de la unidad. La relación de equivalencia de fracciones conocidas. La representación de las fracciones como puntos de una recta: 1/2; 1/4; 3/4.
3er grado		La fracción como cociente. La fracción decimal, décimos. La notación fraccionaria y decimal. La relación de equivalencia entre fracciones, entre expresiones decimales y entre fracciones y decimales. La representación de fracciones y decimales mayores y menores que la unidad como puntos de una recta. Su relacionamiento.
4to grado		La fracción como operador. Otras fracciones decimales. Centésimos. La noción de escala. Los números mixtos.
5to grado		La fracción como razón. Otras fracciones decimales.
6to grado		Las expresiones decimales periódicos y no periódicos. Las propiedades de la numeración racional: idea de densidad, no hay anterior ni posterior.

Fuente: Tabla de elaboración propia.

Finalmente, como ya se mencionó más arriba, se omitieron los demás bloques temáticos sugeridos en el programa oficial de primaria, ya que en dichos bloques el eje principal de trabajo no son los números racionales.

4.3 Currículo Magisterial vs. Currículo Escolar

A partir de lo descrito en los apartados anteriores podemos ver que el currículo matemático escolar demandará una sólida conceptualización matemática y didáctica del maestro pues los conceptos que se espera enseñen son de los que resultan más complejos para los estudiantes, tal como reportan Brusa y Corujo (2014):

> El concepto de fracción es difícil y requiere de una construcción personal que lleva largo tiempo. Si bien supone una ampliación de otros conjuntos numéricos (naturales y enteros), su apropiación demanda la resignificación de distintos aspectos relativos a sus representaciones y operaciones. El funcionamiento de los números racionales supone un quiebre con respecto a los conocimientos acerca de los números naturales. (p.17)

Llama la atención, el hecho de que en formación magisterial no se cuente con una asignatura específica en el área de didáctica de la matemática. Esta última permitiría a los futuros maestros abordar problemas, nada triviales, relacionados con la enseñanza y aprendizaje del concepto. Tal como reportan Brusa y Corujo (2014), para adquirir el concepto de fracción, los estudiantes escolares deben romper con algunas ideas. Ideas que funcionaban muy bien cuando se trabajaba únicamente con número naturales pero que ahora, con los números racionales, dejan de funcionar. Todo lo antes dicho permite preguntarnos ¿conocen los futuros maestros con qué ideas previas deben lidiar al abordar el concepto de fracción?

Es importante destacar que en el propio programa de primaria para el plan 2008 se exige a los maestros cierta preparación didáctica y disciplinar, para la enseñanza de la matemática:

> Enseñar Matemática implica la problematización. Requiere de docentes posicionados en el análisis de los procesos que dan lugar a la construcción de conocimientos, las características y las relaciones de esos conocimientos, el papel que juegan los contextos particulares, el espacio dado a las estrategias personales, la manera de validar las soluciones y la intervención sobre las interacciones sociales. (...) se requiere de un maestro que, en tanto profesional reflexivo, diseñe su intervención atendiendo al rigor teórico académico y al contexto escolar. (CEIP, 2013, pp.63-64)

Es probable que la falta de formación en el área de Didáctica de la Matemática que presenta el plan 2008 magisterial y la escasa carga horaria destinada a la formación específica (apenas un 6,8% del total de la carga horaria) sean algunos de los factores que determinen la manera en que los maestros dictarán sus clases de matemática. En particular, la enseñanza de aquellos conceptos matemáticos complejos como el de fracción, requieren de ciertas destrezas matemáticas y didácticas del maestro. En tal sentido Llinares y Sánchez (1997) reportan que el grado de comprensión que un docente posee del conocimiento específico, de los errores que manifiestan los estudiantes, de qué estrategias son las adecuadas para abordar un concepto y demás, juegan un papel significativo en la enseñanza y aprendizaje. Rojas (2014) manifiesta que el docente es un actor de suma importancia en la actividad de aula, debido a que es un gestor de conocimiento.

En la actualidad, numerosos investigadores (Aguilar et al. 2013; Rojas, 2014; León-Mantero et al. 2016; Carrillo-Yañez et al. 2018) han centrado su interés en el estudio sobre los conocimientos especializados del profesorado en el área de matemática. En este sentido, se puede apreciar que hay especial preocupación por avanzar en las características que conforman el conocimiento profesional y el desarrollo de conocimiento matemático y didáctico que debe tener un docente para llevar adelante su tarea.

Teniendo en cuenta el interés de los investigadores, la formación magisterial en Uruguay y el currículo escolar, nos preguntamos ¿poseen los futuros maestros los conocimientos y las herramientas suficientes para afrontar las altas demandas de enseñanza matemática presentes en el currículo escolar?

La anterior pregunta actúa como pilar para definir el tema del presente trabajo. En particular, el tema es explorar y generar conocimiento sobre el saber matemático y didáctico que poseen los estudiantes avanzados de magisterio en cuanto al concepto de fracción como relación parte-todo.

Es importante destacar que la problemática que se describió en este capítulo, en cuanto a la formación matemática magisterial y el interés actual de los investigadores dan cuenta de la relevancia del tema de investigación y de su interés para la comunidad.

En el capítulo siguiente se describen algunos de los hallazgos encontrados en la literatura que están relacionados con el tema de investigación. Posteriormente se detallan los objetivos generales y específicos del presente trabajo.

5 Antecedentes y Objetivos de la Investigación

En este capítulo se realiza un reporte de los trabajos que guardan estrecha relación con la problemática de estudio. En este sentido, se divide la revisión en dos grandes bloques, el primero contiene trabajos que están relacionados con las dificultades que reviste el concepto de fracción o número racional y el segundo está relacionado con aquellos trabajos que vinculan la enseñanza del concepto de fracción o número racional y el conocimiento docente. Es importante destacar que para esta revisión se eligieron aquellos trabajos que ofrecían insumos para la reflexión o fundamentación ya sea desde la problemática reportada o desde las conclusiones. Además, cabe destacar que al realizar la revisión bibliográfica se encontraron numerosos trabajos relacionados con la temática de estudio por lo que se decidió priorizar aquellos trabajos más recientes y que son citados en más de un trabajo, ver Tabla 3.

Tabla 3: *Antecedentes*

Temática	Año	Título del artículo	Autores	Encontrado en:	N° citas
Dificultades fracción-Número racional	2001	Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.	Martínez y Lascano	Revista EMA	16
	2003	La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo	Obando	Revista EMA	72
	2007	Fractions: conceptual and didactic aspects	Fandiño Pinilla	Google académico.	54
	2009	Las fracciones son un problema	Pazos	Revista que hacer educativo, didáctica y prácticas docentes.	13
Conocimiento docente y concepto de fracción–número racional	2015	Conocimiento especializado de un profesor de matemática de ecuación primaria al enseñar los números racionales	Rojas, Flores y Carrillo	Bolema: Boletim de Educação Matemática	40
	2016	Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente”	Ivars, Buforn y Llinares	Repositorio Institucional de la Universidad de Alicante	5
	2018	Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales	González Retana y Eudave Muñoz	SciELO México	3

Fuente: Tabla de elaboración propia.

Para finalizar ubicamos el tema de la presente tesis teniendo en cuenta la revisión bibliográfica realizada, formulamos los objetivos y posteriormente planteamos las preguntas que guiaron el desarrollo de la investigación.

5.1 Antecedentes de Investigación

5.1.1 El Concepto de Fracción o Número Racional

En lo que sigue se reportan en orden cronológico los trabajos de Martínez y Lascano (2001), Obando (2003), Fandiño Pinilla (2007) y Pazos (2009).

Martínez y Lascano (2001) desarrollan una experiencia de investigación en un curso con 36 estudiantes. Dicha experiencia se basó en el diseño, aplicación y análisis de una secuencia didáctica que contemplaba la interpretación parte-todo de la fracción. La secuencia presentaba una estructura de trabajo diferente a la tradicional pues no se orientaba en un enfoque numérico ni operatorio. Lo esencial de la secuencia era que los estudiantes, a través de ella, se apropiaran de los atributos que caracterizaban a la fracción como relación parte-todo. La secuencia se diseñó de tal manera que contemplaba a la fracción en su interpretación parte-todo en contextos continuos y discretos.

En el análisis de la actividad Martínez y Lascano (2001) reportan dificultades para el reconocimiento y la apropiación, por parte de los estudiantes, de ciertos atributos que caracterizan a la interpretación de la fracción. Los dos atributos que revisten mayor problema son el que implica considerar las partes como totalidad y el que considera las subdivisiones equivalentes.

Respecto al atributo "subdivisiones equivalentes" se indica, en las conclusiones, que el problema podría estar relacionado con el significado que inicialmente se tiene de los números. Los estudiantes interpretan al número como cantidades de elementos pues se encuentran muy familiarizados con los números naturales mientras que en las fracciones hay que utilizar dos números que representan una relación entre la parte y el todo. Así mismo reportan que el atributo "partes como totalidad" resulta difícil pues está vinculado al atributo "subdivisiones equivalentes" y en ese sentido es que señalan que sería pertinente trabajar los dos atributos de forma conjunta. Las autoras mencionan que la importancia del trabajo de estos dos atributos es que están presentes en la relación de equivalencia. Relación que es sumamente importante para establecer una relación de orden en los racionales y para abordar la propiedad de densidad (Martínez y Lascano, 2001).

Obando (2003) realizó una investigación relacionada con los procesos de enseñanza y aprendizajes referentes al concepto de número racional centrándose en la relación parte-todo. Para llevar adelante su investigación implementó una propuesta de trabajo apoyándose en metodologías propias de la Didáctica de las Matemáticas. La investigación se dividió en cuatro etapas en donde se analizaron textos escolares, se realizaron entrevistas a profesores, observaciones de clases y finalmente se diseñó e implementó una secuencia didáctica en diferentes grupos de estudiantes.

En este contexto Obando (2003) reporta que la forma en que se orientan actualmente los procesos de enseñanza y aprendizaje en la escuela conduce a los estudiantes a conceptualizaciones erróneas. En general, se trabaja a las fracciones usando estrategias que se basan en la partición y el conteo mecanizando así ciertas reglas y algoritmos. Así mismo el autor señala que el concepto de medición presente en las fracciones pasa a un segundo plano, a esto se suma que el tipo de magnitud y el tipo de unidad no son trabajados de forma cuidadosa. Obando destaca la importancia de recuperar, en la enseñanza de los números racionales, los tres conceptos antes mencionados.

Fandiño Pinilla (2007) presenta un artículo en donde muestran los resultados de una investigación esencialmente bibliográfica, sobre fracciones. La autora manifiesta que las fracciones son fuente de fracaso, por parte de los estudiantes, en el mundo. Por lo que intenta presentar en este trabajo elementos que ayuden a comprender tal fracaso.

En su investigación, la autora, reporta diferentes interpretaciones que se le dan a las fracciones, señalando entre ellas: parte de un todo en contextos continuos o discretos, cociente, relación entre tamaños, operador, probabilidad, puntuación, número racional, abscisa en la recta numérica, medida y porcentaje.

Así mismo, Fandiño Pinilla (2007) señala en su investigación los conceptos de noética y semiótica de las fracciones indicando que son sumamente importante dentro de matemática. La noética refiere a la adquisición conceptual mientras que la semiótica refiere a la representación de conceptos a través de un sistema de signos. En este sentido, la autora señala que la fracción es un concepto y por lo tanto su aprendizaje está dentro de la noética por lo que no puede mostrarse concretamente. Si bien en la escuela se puede operar con un todo, dividirlo en partes iguales para obtener, por ejemplo, 2/3 de él, se está trabajando con un tipo de registro semiótico, pero no con el concepto. La autora enfatiza en la importancia de reconocer la diferencia entre semiótica y noética pues indica que esto ayudará a comprender el aparente éxito inicial en el trabajo con fracciones por parte de los estudiantes. Estos últimos logran manipular ciertos pasajes en diferentes representaciones, pero no logran construir el concepto.

Para terminar su investigación Fandiño Pinilla (2007) reporta que los estudiantes presentan una serie de dificultades en el aprendizaje de las fracciones de las cuales se destacan: dificultad para ordenar, dificultad para operar, dificultad para manejar el adjetivo "igual", dificultad en el manejo de equivalencias, dificultad en el manejo de figuras no estándar y dificultad para pasar de una fracción a la unidad que la ha generado. Dichas dificultades están asociadas, según la autora, al propio contrato didáctico, a representaciones semióticas excesivas a imágenes prematuras del concepto, a conceptos erróneos, obstáculos didácticos y epistemológicos, entre otros.

A nivel nacional, Pazos (2009) publicó en la revista *Quehacer Educativo* un trabajo titulado "Las fracciones son un problema". En este artículo la autora detalla algunos problemas de enseñanza y aprendizaje que se dan al trabajar con fracciones. Seguidamente señala que algunas prácticas docentes actúan como obstáculo en la construcción del concepto. En este sentido, Pazos (2009) reporta que el trabajo con fracciones se centra en la representación gráfica de fracciones especialmente en la relación parte-todo. En general, se usa el tipo de representación gráfica de círculos o rectángulos. Pazos (2006) señala que la ponderación de este tipo de representaciones deja de lado otros contextos de usos de las fracciones que son importantes para que los estudiantes logren construir el concepto. Así mismo la autora señala que no se establece una relación entre cantidades continuas y discretas, priorizando las primeras y entendiendo que la conceptualización con cantidades continuas es suficiente para que los alumnos trabajen posteriormente con cantidades discretas.

Pazos (2009) destaca que el trabajo con fracciones en donde se prioriza la relación parte-todo no es la más conveniente para desarrollar el sentido de número de las fracciones, aunque es el que se puede observar mayormente en las aulas. Específicamente se reportan una serie de dificultades que se dan al trabajar con este tipo de representación entre las que se destacan: priorizar el conteo de las partes y no la relación entre las partes y todo, no trabajar la independencia de la forma, no tener en cuenta la necesaria equidad de las partes, no trabajar con fracciones mayores a la unidad y no hacer hincapié en la relación número de partes y tamaño de las mismas (Pazos, 2009, pp.41-44). Cabe señalar que cada una de estas dificultades se explica con mayor detalle en la sección 4.6.

5.1.2 *Enseñanza del Concepto de Fracción y el Conocimiento Docente*

En lo que sigue se reportan en orden cronológico los trabajos de Rojas, Flores y Carrillo (2015), Ivars, Buforn y Llinares (2016) y González Retana y Eudave Muñoz (2018).

Rojas, Flores y Carrillo (2015) publicaron un artículo denominado *Conocimiento Especializado de un profesor de Matemática de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales.* En este artículo se describe el conocimiento especializado de un profesor que enseña números racionales a estudiantes de primaria. Para llevar adelante dicha investigación se emplean métodos cualitativos y en particular se elige el estudio de caso como diseño de investigación. Esencialmente se realiza un análisis de 21 sesiones de clase dictadas por un profesor experto, usando para ello el modelo denominado El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).

El modelo MTSK intenta describir cuáles son los conocimientos que debe poseer un docente de matemática para llevar adelante su tarea. En dicho modelo se establece que el docente debe poseer conocimiento en dos dominios que son denominados: Conocimiento Matemático y Conocimiento Didáctico del Contenido. El primer dominio se subdivide en tres subdominios que revisten diversos conocimientos, los cuales son: Conocimiento de los Temas, Conocimiento de la Estructura de la Matemática y Conocimiento de la Práctica Matemática. El segundo dominio también es dividido en tres subdominios los cuales son Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática, Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de la Matemática y Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas. Es importante aclarar que en este apartado los dominios y subdominios de este modelo no se explican en profundidad pues esto se realiza en el capítulo 6 sección 6.3.

Los investigadores Rojas et al. (2015) reportan, en sus conclusiones, que en las clases analizadas predomina el significado de parte-todo al conceptualizar a la fracción. En este sentido, se indica que la enseñanza de los números racionales se centra en dar sentido a la representación fraccionaria del mismo. En particular, el concepto parte-todo predomina en situaciones que permiten trabajar el pasaje de la representación figural a la simbólica. Estas tareas se complementan generalmente con otras que permiten trabajar diferentes tipos de magnitud y unidades (Rojas et al., 2015, p.162). Así mismo los autores señalan que el docente conecta el significado parte-todo, en contextos continuos y discretos, con el significado de fracción como operador pese a sus diferencias.

Por otro lado, los investigadores reportan que el docente maneja los algoritmos operatorios con solvencia lo que indica conocimiento de los temas matemáticos. Pese a esto no se evidencia la búsqueda por desarrollar una comprensión profunda de los algoritmos o la búsqueda de situaciones que den sentido a dichos algoritmos.

Además, Rojas et al. (2015) señalan que, al proponer diferentes actividades a los estudiantes, el docente, manifiesta conocimiento de los errores y dificultades que presentan los estudiantes. El docente ofrece diferentes explicaciones y proporciona tareas que permiten reforzar ciertos conceptos o procedimientos matemáticos. Esto permite afirmar que el docente tiene conocimiento de las características de aprendizaje de los números racionales, así como también conocimiento de las características de la enseñanza.

Ivars et al. (2016) presentan un artículo titulado *Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente".* Los autores denominan "mirar profesionalmente" a la competencia de "...mirar de manera estructurada una situación de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para tomar decisiones que implica no solo experiencia sino también poseer el conocimiento que es pertinente movilizar en cada situación..." (Ivars et al., 2016, p.49). Respecto a esta competencia se destacan tres mecanismos cognitivos, a saber: "reconocer aspectos matemáticamente relevantes en una situación de enseñanza", "interpretar estos aspectos dotándolos de significado", "decidir cómo apoyar el aprendizaje matemático de los alumnos en el sentido de tomar decisiones de acción apoyadas en la interpretación realizada" (Ivars et al., 2016, p.49). Los autores manifiestan que esta competencia "mirar profesionalmente" se puede desarrollar desde la formación de los futuros docentes y es en ella que centran su interés.

En el contexto anterior los autores proponen a estudiantes para maestro algunas tareas y trayectorias de aprendizaje, referentes a número racional, que permitirán desarrollar la "mirada profesional" de éstos. En particular, se propone a los estudiantes para maestro, analizar algunas de las respuestas dadas por los estudiantes escolares a una tarea que en la que se les solicita buscar entre seis representaciones gráficas diversas aquellas que representan ¾, ver anexo 1.4.

En este contexto Ivars et al. (2016) concluyen que los futuros maestros, al analizar las respuestas de los estudiantes escolares, presentan dificultades a la hora de plantear un discurso profesional coherente y adecuado. Sin embargo, las trayectorias de aprendizaje brindadas permitieron, a los futuros maestros, relacionar las respuestas de los niños con dichas inferencias teóricas. Los autores señalan que el aprendizaje de la trayectoria de aprendizaje indicada para fracciones, por parte de los futuros maestros, es fundamental pues les proporciona herramientas para identificar diferencias y similitudes entre las respuestas de los niños. En resumen, se indica que la competencia "mirar profesionalmente" se apoya en dos pilares fundamentales. El primero se vincula con la instrumentalización de una trayectoria de aprendizaje para ciertos conceptos matemáticos pues permite analizar el pensamiento de los niños desde lo empírico y lo teórico (Ivars et al., 2016, p.64). Y el segundo se relaciona con la cohesión entre la definición de objetivos de aprendizaje y la variedad de tareas que los futuros maestros pueden proponer para apoyar las progresiones de aprendizaje de los niños (Ivars et al., 2016, p.64).

En acuerdo con las líneas de investigación antes descritas encontramos a González Retana y Eudave Muñoz (2018). Dichos investigadores, en su trabajo, indican que tanto las fracciones como los números decimales son un reto de aprendizaje y enseñanza para los estudiantes y profesores, respectivamente. En particular, resulta un desafío para aquellos que se están formando como profesores. En este marco es que los investigadores muestran, en su artículo, un análisis del Conocimiento Común del Contenido sobre fracciones y decimales que poseen los futuros maestros, apoyándose en el Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MTSK).

Utilizando una metodología cuantitativa, los investigadores González Retana y Eudave Muñoz (2018) aplican un cuestionario de conocimiento sobre fracciones y decimales a 275 estudiantes para maestro de centros rurales y urbanos. En la aplicación de dicho cuestionario concluyen que los estudiantes obtienen mejores resultados en las actividades que implican el uso de números decimales que en los que implican el uso de fracciones. En general, en aquellas actividades en donde se muestran los números en su representación fraccional los estudiantes tienden a convertirlos a números decimales. Los autores González Retana y Eudave Muñoz (2018) reportan que los números decimales aportan ventajas respecto a los números dados en fracción, pues los algoritmos que se utilizan para operar con ellos son los mismos que los aplicados para números naturales (p.135). Cabe destacar que la conversión de fracción a decimal no asegura resultados correctos, de hecho, varios estudiantes presentan dificultades al operar con decimales pues ubican las cifras de forma incorrecta no respetando su valor posicional. En resumen, los autores indican que, aunque los futuros maestros cuentan con Conocimiento Común del Contenido sobre decimales y fracciones hay varios errores que persisten y que no se han podido corregir en la educación posterior (González Retana y Eudave Muñoz, 2018, p.135).

En lo que sigue ubicamos el trabajo de investigación teniendo en cuenta los antecedentes revisados, planteamos las preguntas y objetivos de la presente tesis.

5.2 Objetivos y Preguntas de la Investigación

Los estudios revisados en la sección anterior (Martínez y Lascano, 2001; Obando, 2003; Fandiño Pinilla, 2007; Pazos, 2009; Rojas et al. 2015; Ivars et al., 2016; González Retana y Eudave Muñoz, 2018), así como la problemática planteada que es explorada a partir de los programas escolares y de las entrevistas a los expertos (Ex 1, Ex 2, 2020) nos permiten afirmar que desde hace mucho tiempo hay especial interés, en el campo educativo, por la enseñanza y aprendizaje de los números racionales. En especial podemos ver que en el último tiempo varios autores han centrado su interés en investigar qué conocimiento tienen los futuros docentes sobre número racional y fracciones pues entienden que esto condiciona su futura enseñanza. Todo lo indicado nos permitió plantear algunas preguntas, que son las que posteriormente guiaron nuestro trabajo:

Pregunta general: ¿Cuentan los futuros maestros del Instituto Normal de Montevideo (IINN) con los conocimientos matemático y didáctico necesarios para poder enseñar el concepto de fracción en su interpretación parte-todo?

A partir de la pregunta anterior se pueden desprender otras preguntas específicas respecto a la problemática planteada:

- ¿Cuentan los futuros maestros del IINN con los conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza del concepto de fracción como relación parte-todo?
- ¿Qué conocimiento didáctico poseen los estudiantes avanzados del IINN para la enseñanza del concepto de fracción como relación parte-todo?
- ¿Qué conocimiento didáctico poseen los estudiantes avanzados del IINN sobre los errores que cometen los estudiantes de primaria, respecto al concepto de fracción como relación parte-todo?

- ¿Qué evaluación realizan los futuros maestros del IINN de los errores que presentan los estudiantes de primaria, al trabajar con la relación parte-todo que caracteriza a la fracción?
- ¿Qué conocimiento poseen los futuros maestros del IINN de las estrategias usadas por los estudiantes escolares para resolver tareas que impliquen el concepto de fracción como parte-todo?
- ¿Qué conocimiento poseen los futuros maestros sobre las imágenes conceptuales que se forman los estudiantes escolares al trabajar el concepto de fracción como parte-todo?

Estas preguntas nos permiten guiar nuestro estudio y formular los objetivos de investigación.

5.2.1 Objetivo General

Explorar y generar conocimiento acerca del saber matemático y didáctico que poseen los estudiantes avanzados del Instituto Normal de Montevideo (IINN), en cuanto al concepto de fracción como relación parte-todo.

A partir del objetivo general podemos apreciar que se tienen dos categorías conceptuales sobre el concepto de fracción como relación parte-todo, a saber: conocimiento matemático y conocimiento didáctico. Cada una de estas categorías conceptuales se pueden desagregar en los objetivos específicos que se detallan a continuación.

5.2.2 Objetivos Específicos

(1) Identificar el conocimiento matemático que poseen los estudiantes avanzados del IINN, sobre el concepto de fracción como relación parte-todo.
(2) Describir el conocimiento didáctico que poseen los estudiantes avanzados del IINN, en relación a los errores que cometen los estudiantes escolares al aplicar el concepto de fracción como relación parte-todo.
(3) Indagar si los futuros maestros reconocen, en producciones escritas de estudiantes escolares, diferentes imágenes conceptuales que se ponen en juego al resolver una actividad matemática que involucre el concepto fracción como parte-todo.

(4) Indagar el conocimiento que poseen los futuros maestros sobre las estrategias que ponen en juego los estudiantes escolares al enfrentarse a una actividad que involucra el concepto de fracción en su interpretación parte-todo.

Tal como se puede apreciar en los objetivos y preguntas de investigación están presentes los conceptos de: conocimiento didáctico, conocimiento matemático, fracción como relación parte-todo y errores que presentan los estudiantes al trabajar con fracciones en su relación parte-todo. Estos conceptos son revisados en el capítulo que sigue (marco teórico) y en él se define el marco conceptual que fue tenido en cuenta para la presente tesis.

6 Marco teórico

En este capítulo se desarrollan los conceptos teóricos que estructuran la investigación y que nos permiten posteriormente dar respuesta a los objetivos.

En primer lugar, se comienzan introduciendo los principales aportes teóricos que dieron lugar al modelo denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK por sus siglas en inglés). Luego se analizan las principales ventajas del modelo y se profundiza en él.

En segundo lugar, se desarrolla el concepto de fracción, profundizando en la relación parte-todo. Posteriormente se indican las principales dificultades que se evidencian en el uso del concepto de fracción como relación parte-todo.

Y finalmente se realiza una adaptación del modelo MTSK a los objetivos de investigación, delimitándolo además en relación al concepto de fracción como relación parte-todo.

6.1 Antecedentes del Modelo MTSK

En lo que sigue se desarrollan los principales aportes teóricos de tres modelos que centraron su atención en determinar qué conocimientos son necesarios para la enseñanza. El primer modelo que se expone es el de Shulman (1986 y 2005); modelo que da origen a otro denominado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MTK, por sus siglas en inglés) que es desarrollado principalmente por Ball (2000 y 2003). Finalmente, algunos investigadores tales como Aguilar et al. (2013) adaptan este último modelo dando origen al modelo denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK, por sus siglas en inglés). Al final de esta sección se realiza una comparación teórica entre los tres modelos expuestos para comprender sus diferencias y similitudes.

Como ya adelantamos en el párrafo anterior algunos investigadores (Shulman, 1986 y 2005; Ball, 2000; Ball, 2003; Ball et al. 2008; Hill et al., 2005; Hill et al. 2008; Contreras et al., 2017; Aguilar et al., 2013) se han interesado en determinar qué conocimientos necesitan los profesores para la enseñanza. En particular, algunas de estas investigaciones permiten avanzar en la conceptualización del conocimiento específico que el profesor debería poseer para la enseñanza de la matemática.

Los aportes teóricos de Shulman (1986, 2005) son la base de varios trabajos de investigación que intentan determinar qué conocimientos, habilidades y destrezas son deseables para la profesión docente. Inicialmente, el autor reporta tres categorías de conocimientos deseables para el profesor, a saber, *conocimiento del contenido*, *conocimiento pedagógico del contenido* y *conocimiento del currículo* (Shulman, 1986).

Posteriormente, el autor profundiza en sus estudios y determina con mayor precisión qué conocimientos son base para la enseñanza, destacando los que se detallan a continuación:

- *Conocimiento del contenido*;
- *Conocimiento pedagógico general*: este refiere a los principios y estrategias de manejo y organización de la clase que trascienden la asignatura;
- *Conocimiento del currículo*: este refiere al dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente;
- *Conocimiento pedagógico del contenido*: este refiere a la amalgama entre asignatura y pedagogía;
- *Conocimiento de los estudiantes y de sus características*;
- *Conocimiento de los contextos educativos*: este comprende el funcionamiento del grupo, la organización de las instituciones y las características culturales de la comunidad;
- *Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos.* (Shulman, 2005, p.11)

Entre los conocimientos que se mencionaron anteriormente, Shulman enfatiza *el conocimiento pedagógico del contenido* porque según el autor es característico de la profesión docente. En tal sentido Shulman (2005) reporta que "(…) es la categoría que, con mayor probabilidad, permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo." (p.11).

Siguiendo las ideas de Shulman, pero ahora en el contexto de enseñanza de la matemática, Ball (2000) menciona que existen tres problemas que se deberían resolver para poder tener docentes mejor preparados para ejercer la tarea de enseñar matemática, a saber:

> El primer problema se refiere a identificar el conocimiento del contenido que importa para la enseñanza, el segundo se refiere a comprender cómo dicho conocimiento necesita ser sostenido, y el tercero se centra en lo que se necesita para aprender a usar dicho conocimiento en la práctica. (p.1)

Es verdad que la enseñanza de la matemática demanda a los docentes saber manejar con destreza ciertos contenidos matemáticos, como, por ejemplo, algoritmos de cálculo y procedimientos, pero esto, según Ball (2000, 2003), no es suficiente. Los profesores deben ser capaces no solo de contar procedimientos o de transmitir algoritmos sino de transformar los conceptos a enseñar, para que los mismos sean comprensibles a los estudiantes. La enseñanza requiere que los docentes justifiquen, analicen errores o procedimientos, generalicen ideas de los estudiantes, entre otras habilidades que pueden resultar aún más complejas (Ball, 2003).

Ball et al. (2005) citados en Ball et al. (2008) se preguntan "¿Qué necesitan saber y poder hacer los maestros para llevar a cabo eficazmente el trabajo de enseñar matemática?" (p.3). En tal sentido se reporta la necesidad de que los profesores conozcan los temas y procedimientos que deberán enseñar. Esencialmente, los investigadores se centran en cómo los profesores necesitan saber esos temas y procedimientos.

Intentando dar respuesta a la problemática planteada, los investigadores Ball (2000, 2003), Ball et al. (2008), Hill et al. (2005) y Hill et al. (2008) analizan el conocimiento matemático y pedagógico de los profesores, necesario para la práctica. Así mismo, en los trabajos de Ball (2000, 2003) y Ball et al. (2008) se proponen un refinamiento de las categorías de conocimiento propuestas por Shulman, dando lugar al modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, siglas que derivan de la denominación en inglés *Mathematical Knowledge for Teaching*).

Partiendo de la noción de *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK: Pedagogical Content Knowledge)[1] planteada por Shulman, se delimitan las dimensiones del modelo MKT (ver Figura 1). En sus estudios Ball et al. (2008) manifiestan la decisión de comenzar desde la práctica docente y así definir los conocimientos necesarios para la enseñanza de la matemática, centrándose en cómo los profesores necesitan saber esos contenidos.

Los autores de este modelo realizan una subdivisión de las categorías indicadas anteriormente por Shulman (1986 y 2005). A continuación, se explicitan las subcategorías definidas y se describen brevemente.

Según Hill et al. (2008) la categoría de *conocimiento del contenido* puede subdividirse en tres subcategorías, a saber:

[1] Las siglas de todos los dominios y subdominios del modelo MKT derivan del inglés.

Conocimiento común del contenido (CCK: Common Content Knowledge): esta categoría hace referencia a los conocimientos y habilidades que los profesores necesitan para llevar adelante su tarea, se relaciona con el conocimiento que cualquier adulto formado en el campo matemático puede tener. Ejemplo de este conocimiento puede ser conocer el algoritmo para sumar dos fracciones como: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ o poder evaluar si un estudiante da una respuesta correcta frente a tal operación. El término "común", no sugiere que todos tengan este conocimiento, sino que es un conocimiento que no es exclusivo de la enseñanza. Continuando con el ejemplo anterior podemos ver que conocer el algoritmo para sumar dos fracciones no es exclusivo del profesor ya que cualquier persona formada matemáticamente podría conocerlo. En esta categoría se incluye, además, saber cuándo se muestra en un libro de texto una definición poco precisa (Ball et al., 2008).

Conocimiento especializado del contenido (SCK: Specialized Content Knowledge)*:* esta categoría hace referencia a los conocimientos y habilidades característicos del docente. Es decir, es un conocimiento que va más allá del conocimiento común que un adulto bien preparado matemáticamente puede tener. Por ejemplo conocer la naturaleza del error que lleva a alguien a dar la respuesta $\frac{2}{5}$ frente a la operación $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ es un ejemplo de este tipo de conocimiento. En esta categoría se incluyen, además, aquellos conocimientos que el profesor debe poseer para analizar la viabilidad de distintos métodos de resolución de problemas (Ball et al., 2008)

Conocimiento del horizonte matemático: este conocimiento hace referencia a la conciencia por parte del profesor de lo pasado y lo futuro. Un ejemplo de este puede ser el conocimiento que el profesor puede tener de cómo se relacionan, a lo largo de los distintos ciclos escolares, los diferentes temas del currículum matemático. O también el conocimiento que el docente puede tener acerca de cómo se relacionan los contenidos matemáticos entre sí (Fernández y Figueiras, 2010). Este tipo de conocimiento permite a los profesores tomar decisiones al momento de impartir sus clases.

Por otro lado, la categoría *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK) se divide en tres subcategorías, a saber:

Conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS: Knowledge Content and Stundents)*:* esta categoría refiere a la combinación entre el conocimiento matemático y el conocimiento sobre los estudiantes. Los docentes deberían poder anticiparse al pensamiento de los estudiantes y además determinar qué procedimientos o conceptos les resultarán confusos. En esta categoría se incluye, por ejemplo, el conocimiento de los errores que frecuentemente cometen los estudiantes (Ball et al., 2008). Volviendo al ejemplo expuesto más arriba, el profesor debería poder anticiparse a los errores que pueden cometer los estudiantes al intentar resolver la operación $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Este tipo de conocimiento permite a los docentes reconocer que muchos estudiantes responderían a la operación anterior con el resultado $\frac{2}{5}$, debido a que el error de sumar numeradores y denominadores es frecuente entre los estudiantes.

Conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT: Knowledge of Content and Teaching)*:* este conocimiento es el que combina el saber matemático con el de enseñanza. En su tarea, el profesor, debe constantemente elegir con qué ejemplos comenzar la instrucción o cuáles métodos son adecuados para abordar un contenido. En esta categoría se incluye, por ejemplo, la evaluación de las ventajas y desventajas de las representaciones que se usarán para abordar un concepto específico (Ball et al., 2008). En este sentido, decidir cuál es la mejor instrucción que permitirá a un estudiante superar el error que lo lleva a dar la respuesta $\frac{2}{5}$ a la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, es un claro ejemplo de este tipo de conocimiento.

Conocimiento del curriculum: esta categoría hace referencia al conocimiento de los contenidos y plan de estudios. El profesor debe tener el conocimiento de cómo está organizado el curriculum del nivel, esto le permitirá planificar la actividad (González Retana y Eudave Muñoz, 2018).

Partiendo de los aportes de Shulman, de la definición del modelo MKT de Ball y colaboradores y de la experiencia profesional, los investigadores Aguilar et al. (2013) presentan un modelo para el conocimiento del profesor de matemática, llamado *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* (MTSK).

El modelo MTSK pretende ser una herramienta que permita analizar el conocimiento que los docentes muestran, poseen o declaran poseer para desempeñar su labor (Aguilar et al., 2013).

En el modelo MTSK se conservan los dominios conocimiento matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK) del modelo MKT. Cada uno de los dominios, a semejanza de lo que sucede en el modelo MKT, se divide en tres subdominios. A continuación, se realiza una breve descripción de los dominios y subdominios del modelo MTSK, profundizando en estos dominios y subdominios en la próxima sección.

En Montes et al. (2013) se indica que dentro del *conocimiento matemático* (MK) tenemos los siguientes subdominios:

Conocimiento de los temas (KoT): este subdominio refiere al contenido disciplinar de la matemática. Aquí se integran aspectos fenomenológicos, significados de conceptos o ejemplos específicos que caractericen los contenidos matemáticos a abordar (Montes et al., 2013)

Conocimiento de la estructura matemática (KSM): este subdominio refiere al conocimiento del profesor para desentrañar conexiones matemáticas. El conocimiento del profesor debe incluir aspectos que vayan más allá de los conceptos como elementos aislados, estos se deben entender cómo "(…) integrados en un sistema de conexiones, que permitirá al profesor comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar ciertos conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas." (Montes et al., 2013, p.405).

Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM): este subdominio se relaciona con el conocimiento que el docente posee sobre cómo se piensa en matemático. En este subdominio, se incluye, por ejemplo, el conocimiento que el docente tiene respecto a diferentes formas de definir, argumentar o demostrar en el área incluyendo también el conocimiento de la sintaxis matemática (Montes et al. 2013).

Por otra parte, en Montes et al. (2013) se indica que dentro del *conocimiento didáctico del contenido (PCK)* se tienen los siguientes subdominios:

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): este subdominio refiere al conocimiento que el profesor posee respecto a la acción de enseñar. Este último contempla el conocimiento de cómo esa enseñanza puede o debe ser llevada a cabo, para ser efectiva, además de conocimiento de estrategias que fomente el desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales de los estudiantes (Montes el al., 2013).

Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM): este subdominio refiere al conocimiento que el profesor tiene sobre los procesos de aprendizaje de los alumnos. El profesor debe conocer "(…) las características del proceso de comprensión de los estudiantes de los distintos contenidos, los errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada concepto, o el lenguaje habitualmente usado por los estudiantes en relación con el concepto tratado en clase." (Montes et al., 2013).

Conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas (KMLS): este subdominio refiere al conocimiento del currículo institucional. Este último permite al profesor saber qué se espera de los estudiantes en cada etapa del currículum escolar (Montes et al., 2013).

En el modelo MTSK Montes et al. (2013) establecen que los seis subdominios definidos anteriormente están atravesados por creencias de los docentes. Estas creencias van desde las que el docente tiene sobre la propia matemática hasta las que tiene en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la matemática (ver Figura 1).

A partir del recorrido anterior podemos ver que los tres modelos expuestos tienen varias similitudes y diferencias, es por eso que en lo que sigue se comparan los dominios indicados para los tres modelos. Esta comparación permitirá comprender cuáles son los nuevos aportes de cada modelo, así como también encontrar las conexiones entre ellos. Dicha comparación es tomada del trabajo de González et al. (2018). En este trabajo se resumen los principales modelos teóricos que permiten analizar el conocimiento necesario que un profesor debe poseer para desarrollar su práctica, entre los cuales se encuentran: el modelo de Shulman, el modelo MKT y el modelo MTSK. La Tabla 4, es una adaptación de la tabla original y muestra la comparación realizada por los autores para dichos modelos.

Tabla 4: *Comparación de las dimensiones de los distintos modelos del conocimiento del profesor*

Conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 1987)	**Mathematical Knowledge Teaching (Ball, 2000 y 2003)**	**Mthematical Teacher´s Specialized Knowledge (Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán, 2012)**
Conocimiento del contenido	Conocimiento común del contenido (CCK)	Conocimiento de los temas (KoT)
	Conocimiento especializado del contenido (SCK) Conocimiento del horizonte matemático	Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) Conocimiento de la práctica matemática (KPM)
Conocimiento de los estudiantes y sus características Conocimiento pedagógico general	Conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS)	Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)
Conocimiento pedagógico del contenido	Conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT)	Conocimiento didáctico del contenido Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)
Conocimiento curricular Conocimiento de contextos educativos Conocimiento de los fines, propósitos y valores de educación	Conocimiento del currículo	Conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS)

Fuente: González et al. (2018)

La comparación antes realizada nos permite ver que los modelos MTK y MTSK aportan algunos subdominios que no estaban contemplados en el modelo original de Shulman. En la próxima sección se evaluarán las ventajas del modelo MTSK frente al modelo MTK.

6.2 Algunas Ventajas del Modelo MTSK Frente al MKT

Investigadores como (Montes et al., 2013; Flores-Medrano, Sosa et al. 2016) y hasta el propio Ball et al. (2008) identifican ciertos problemas en la implementación del modelo MKT. A continuación, exponemos algunas de las dificultades reportadas y como el modelo MTSK puede dar solución a ellas.

En sus aportes teóricos Flores-Medrano, Sosa et al. (2016) explican que la definición de los "(…) subdominios del MKT quedan en términos de aquello que el profesor es capaz de hacer al tener ese tipo de conocimiento. Sin embargo, normalmente dichas acciones requieren de más de un tipo de conocimiento." (p.8). En acuerdo con esto último, Ball et al. (2008) reportan que, seguramente, los subdominios establecidos en el modelo MKT demandarán de mayor revisión y refinamiento.

A partir de lo indicado anteriormente Montes et al. (2013) identifican, en el modelo MKT, un problema de delimitación en los subdominios. En este sentido, se reporta que, al intentar analizar un episodio matemático de aula, surgen problemas de solapamiento de los subdominios definidos en el MKT. Por ejemplo, frente al problema de encontrar el resultado de la operación *125-39* un alumno puede dar como respuesta *114*. Esta dificultad se podría explicar desde el dominio *conocimiento especializado (SCK)* o desde el dominio *conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).* Este hecho es cuestionado por Flores-Medrano, Sosa et al. (2016):

> ¿Interpretar que en las unidades y en las decenas se está restando en orden contrario es interpretar el pensamiento matemático del estudiante? ¿Es eso conocimiento común o conocimiento del contenido y de los estudiantes? ¿Hay alguna ganancia analítica de asignar esto a conocimiento especializado y el hecho de que es un error común establecerlo como conocimiento del contenido y de los estudiantes (tal como hacen sus autores [Ball et al. (2008)])? (p.9)

Al diferenciar el conocimiento común del conocimiento especializado del profesor surge otro problema en el modelo MTK. Por ejemplo, un conocimiento que es especializado para un profesor de bachillerato, puede ser común para un profesor de la universidad (Flores-

Medrano, Sosa et al., 2016). Es por ello que los autores advierten un problema en esta diferenciación de conocimiento. Pues como ellos mismos indican la diferencia entre estos dos tipos de conocimiento no depende de su naturaleza, sino del sujeto que lo posee o del sujeto que lo analiza.

Como se mostró anteriormente el conocimiento especializado definido por Ball y colaboradores causa conflictos con otros subdominios. Es por ello que Flores-Medrano, Sosa et al. (2016) afirman que los problemas del modelo MKT, están relacionados con la dicotomía común-especializado y con el no reconocimiento del conocimiento didáctico del contenido como una unidad especializada.

Para superar algunos de los problemas señalados, en el modelo MTSK Flores-Medrano, Sosa et al. (2016) proponen una reestructura de los subdominios: conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento del horizonte propuestos en el modelo MKT. Esta reestructura deriva en una división diferentes de los conocimientos señalados.

En el modelo MTSK, se reconoce la potencialidad de describir el cuerpo de conocimientos que son específicos del profesor de matemática. Pero a diferencia del modelo MTK, el MTSK no considera que estos conocimientos sean totalmente de naturaleza matemática o didáctico-matemática, se considera que es el conjunto de todos los subdominios del modelo los que dan lugar al conocimiento especializado del profesor (Flores-Medrano, Sosa et al., 2016).

Debido a los problemas señalados en este apartado para el modelo MKT, en la presente tesis se decide trabajar con los constructos del modelo MTSK. Este último redefine los subdominios antes planteados por el MKT. En la próxima sección se describen con mayor detalle cada uno de los subdominios que aporta el modelo.

6.3 El Modelo MTSK

El modelo MTSK surge del trabajo de un grupo de investigadores denominado *Seminario de Investigación en Educación Matemática* (SIDM), de la Universidad de Huelva (España) en los años 2011-2012. Dicho grupo de investigadores se encontraban interesados en avanzar en la temática desarrollada anteriormente por Ball y colaboradores sobre el conocimiento y desarrollo profesional de los profesores de matemática. Es por esto que, como se mencionó anteriormente, el modelo tiene sus principales antecedentes en los aportes de Shulman y en el modelo MKT desarrollado por Ball y colaboradores.

En manos del grupo SIDM, se han llevado a cabo investigaciones con distintos docentes usando el modelo MKT, detectando fortalezas y debilidades. Posteriormente los investigadores redefinen los subdominios del MKT, obteniendo el modelo MTSK cuyos subdominios se pueden ver en la Figura 1.

En el modelo MTSK se considera que la especificidad del conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática, atraviesa a los dominios: conocimiento matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK) y a cada uno de los subdominios en que estos dominios se dividen (Carrillo-Yañez et al., 2018).

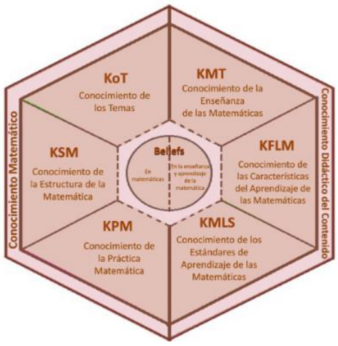


Figura 1*: Dimensiones del modelo MTSK (Contreras, Montes, Climent, & Carrillo, 2017)*

Cada uno de los subdominios del modelo MTSK se construye en términos de lo que el profesor usa o necesita para su profesión. Se debe destacar que en este modelo no se hace referencia al conocimiento matemático en otras profesiones. Según Carrillo-Yañez et al. (2018) esto último evita problemas de superposición entre los dominios y subdominios. Es por tanto, un modelo que permite obtener de forma analítica "(…) información sobre el conocimiento del maestro, específicamente los elementos que componen este conocimiento y las interacciones ente ellos." (Carrillo-Yañez et al., 2018, p.4).

A continuación, se describe cada uno de los dominios y subdominios del modelo MTSK. En esta descripción no se trata el dominio *creencias* definido en el modelo pues no se vincula con los objetivos de la tesis.

Es importante destacar que posteriormente se adapta el modelo MTSK a los objetivos de investigación del presente trabajo. Dicha adaptación implica, por un lado, elegir algunos de los subdominios del modelo MTSK, que son los que se vinculan directamente con los objetivos de la tesis, y por otro, definir estos dominios en términos del concepto de fracción desde su interpretación como relación parte-todo.

6.3.1 Conocimiento Matemático (MK)

En la definición del modelo, se considera en primer lugar la dimensión del conocimiento matemático. Este es entendido como el conocimiento que un profesor de matemática tiene "(…) en términos de una disciplina científica dentro de un contexto educativo (…)" (Carrillo-Yañez et al., 2018, p.5).

Para comprender dicho dominio se necesita describir cada uno de los subdominios que lo integran, que son: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura de la matemática (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM).

6.3.1.1 Conocimiento de los Temas (KoT)

Este subdominio comprende el conocimiento profundo de los contenidos matemáticos y el conocimiento de la matemática escolar. Específicamente en esta categoría se incluye el conocimiento de conceptos, procedimientos, hechos, reglas, teoremas, etc. con sus respectivos fundamentos (Flores-Medrano, Montes et al., 2016).

Por otro lado, en este subdominio podemos encontrar el conocimiento sobre el tipo de problema al que se puede aplicar un determinado contenido matemático, considerando el contexto y significados asociados al problema (Carrillo-Yañez et al., 2018).

El conocimiento de propiedades y sus principios subyacentes, así como las formas de representar los contenidos matemáticos también integran el KoT. Cabe destacar que, dentro del conocimiento de las definiciones, se incluye el conocer diferentes imágenes, representaciones, registros y ejemplos de un mismo objeto matemático (Carrillo-Yañez et al., 2018).

Otros aspectos que integran al KoT refieren a conocer diferentes fenómenos que den sentido al contenido, así como también distintas aplicaciones del contenido en otras áreas o en la propia matemática.

Por ejemplo, para trabajar con fracciones, el conocimiento de un profesor debe ir más allá de conocer únicamente la definición de dicho concepto. Debe además conocer las relaciones de equivalencia que se presentan al trabajar con fracciones, así como los algoritmos que se tienen para las diferentes operaciones y sus fundamentos. También es necesario que el profesor domine los diferentes fenómenos en los que las fracciones se ven implicadas. A su vez debe conocer las diferentes interpretaciones que se tienen del concepto, a saber: parte-todo, medida, razón, cociente y operador. Y finalmente debe conocer los distintos modos de representación de las fracciones: concreta, gráfica, verbal o simbólica y el tratamiento dado a las fracciones en contextos continuos y discretos (Liñan et al., 2016, p.13).

Con el fin resumir las diferentes categorías de análisis que se fueron mencionando sobre este subdominio, Carrillo-Yañez et al. (2018, p.8), han creado una esquema que identifica cuatro categorías, a saber: (1) Procedimientos, (2) Definiciones, propiedades y sus fundamentos, (3) Registro de representaciones y (4) Fenomenología y aplicaciones.

6.3.1.2 Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM)

Este subdominio permite describir el conocimiento del profesor sobre las conexiones entre los contenidos matemáticos. En este sentido, el KSM, implica conocer las relaciones entre distintos contenidos, dentro o fuera del curso que se imparte o en otros niveles educativos (Flores-Medrano, Montes et al., 2016).

Tal como se cita en Montes y Climent (2016) los autores Gamboa y Figueiras, (2014) definen al concepto conexión como "redes de enlaces que coordinan definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos para construir interconceptos" (p.340).

En relación al concepto de conexión antes expuesto, Montes y Climent (2016) definen cuatro tipos de conexión.

El primer tipo de conexión es el de complejización. Este se da cuando un profesor reflexiona o usa un concepto desde un punto de vista más avanzado (Montes y Climent, 2016, p.22). Por ejemplo al plantear el siguiente problema "encuentre todos los números naturales menores que $\frac{7}{2}$" un profesor podría, por el conocimiento que tiene sobre los conjuntos numéricos, reflexionar sobre la cantidad de soluciones de dicho problema. En este sentido, aceptaría que el número de soluciones de dicho problema es finito. Mientras que si el problema se resolviera en el conjunto de los números reales el número de soluciones sería infinito.

El segundo tipo de conexión que definen Montes y Climent (2016) es el de simplificación. Este tipo de conexión se da cuando un profesor usa un concepto o reflexiona sobre este desde un punto de vista más simple (p.22).

En tercer lugar, se definen las conexiones auxiliares. Este tipo de conexión refiere a la aparición de un cierto conocimiento matemático en otros más grande. Un ejemplo de conexión auxiliar puede ser el uso de ecuaciones para el cálculo de raíces de una función (Carrillo-Yañez et al., 2018).

En cuarto lugar, se definen las conexiones transversales. Este tipo de conexiones refiere a la aparición de algunos conceptos, en otros, a lo largo de todo el ciclo escolar. Por ejemplo, el concepto de igualdad aparece a lo largo de los distintos niveles escolares tomando diferentes significados según la actividad matemática que se desarrolla.

Con el fin de resumir las diferentes categorías de análisis que se fueron mencionando sobre este subdominio, Carrillo-Yañez et al. (2018, p.9), han creado un esquema que identifica cuatro categorías, a saber: (1) Conexiones de complejización, (2) Conexiones de simplificación, (3) Conexiones auxiliares y (4) Conexiones transversales.

6.3.1.3 Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)

Este subdominio implica el conocimiento de cómo se genera el conocimiento matemático y de cuáles son las reglas sintácticas de la disciplina. Además, en esta categoría se incluye el conocimiento sobre cómo se demuestra, justifica y define en matemática. Conocer la diferencia entre demostración, prueba y comprobación o conocer el valor de los ejemplos y las conjeturas en las anteriores, también va a formar parte de esta categoría (Flores-Medrano, Montes et al., 2016).

Carrillo-Yañez et al. (2018) reportan que el KPM de un tema puede ser general o específico. El general implica conocimiento de cómo se desarrolla la matemática más allá de cualquier concepto particular, por ejemplo, el conocimiento del significado de una condición necesaria y suficiente. Mientras que el KPM específico es una parte del KPM general y está asociado con las particularidades del tema. Un ejemplo de esta último puede ser el uso de las pruebas por inducción que están asociadas con la manera de proceder con conjuntos infinitos numerables.

Vale la pena aclarar que, en este subdominio, la palabra práctica, no hace referencia al proceso de enseñanza. Flores-Medrano (2016) definen practica matemática:

> "(...) como aquella actividad matemática cuyo uso constituye un pilar en la creación matemática y que tiene un sustento lógico que nos permite abstraer reglas para ésta. Su conocimiento por parte del profesor de matemáticas incluye, entre otras cosas, el que tiene acerca de qué es demostrar, justificar, definir, deducir, inducir..." (p.30)

Con el fin de resumir las diferentes categorías de análisis que se fueron mencionando sobre este subdominio, Reyes Camacho y Sosa Guerrero (2019, p.108), han creado un esquema que identifica seis categorías, a saber: (1) Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, (2) Formas de validación y demostración, (3) Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, (4) Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemática, (5) Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo: modelación) y (6) Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

6.3.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

El segundo dominio que se considera en la definición del modelo, es el PCK. Este último está integrado por "(...) el conocimiento relacionado con el contenido matemático en términos de aprendizaje individual." (Carrillo-Yañez et al., 2018, p.5).

A diferencia del modelo teórico de Shulman, en el modelo MTSK, el PCK representa solo una parte del conjunto de conocimientos necesarios para la enseñanza y forma un todo cuando se complementa con el MK. Las decisiones y acciones del profesor se ven guiadas por el actuar conjunto del MK y PCK.

Para comprender dicho dominio necesitamos describir cada uno de los subdominios que lo integran, que son: conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT), conocimiento de las características de aprendizaje de la matemática (KFLM) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática (KMLS).

6.3.2.1 Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT)

Este subdominio refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre la matemática como objeto de enseñanza. En tal sentido el conocimiento que un profesor tiene acerca del potencial de algunas estrategias de enseñanza, actividades y técnicas, que le permitirán abordar un cierto contenido matemático, constituyen algunos de los aspectos del KMT.

La conciencia sobre posibles limitaciones u obstáculos que se pueden derivar de la utilización de ciertas estrategias y actividades también van a integrar el KMT. Así mismo un docente en su tarea de enseñar usará diferentes recursos y materiales didácticos (libros, recursos tecnológicos, etc.), conocimientos que también componen al subdominio. Cabe destacar que el conocimiento, por ejemplo, de recursos digitales o materiales debe ir más allá del simple hecho de saber utilizarlos. Cuando se habla de conocimiento sobre ciertos recursos digitales o materiales se hace referencia a conocerlos críticamente, es decir, el docente debe ser capaz de identificar qué potencialidades brinda tal recurso en cuanto a la enseñanza. Por ejemplo, para trabajar con fracciones un profesor podría optar por integrar en sus cursos el uso del Tangram. El Tangram consiste en un puzzle formado por siete piezas como muestra la Figura 2. En tal sentido, el docente debería poder justificar la elección del recurso desde las potencialidades matemáticas que este aporta al trabajo con fracciones. De este modo se podría indicar que el recurso ayuda a conceptualizar la idea "partes congruentes" sin necesidad de tener la misma forma (Llinares y Sánchez, 1997).

Figura 2*: Tangram*

Este conocimiento puede tener origen en la propia experiencia docente, en los resultados de investigación o en la propia formación del profesor (Carrillo- Yañez et al., 2018).

Con el fin de resumir las diferentes categorías de análisis que se fueron mencionando sobre este subdominio, Carrillo-Yañez et al. (2018, p.13), han creado un esquema que identifica tres categorías, a saber: (1) Teorías de la enseñanza de las matemáticas, (2) Recursos didácticos (materiales y digitales) y (3) Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

6.3.2.2 Conocimiento de las Características del Aprendizaje de la Matemática (KFLM)

Este subdominio refiere al conocimiento que un profesor tiene sobre cómo aprenden los estudiantes los contenidos matemáticos. Cabe destacar que el centro de este subdominio son las características de aprendizaje que emergen de la interacción del estudiante con el contenido matemático y no las características del estudiante en sí mismo (Escudero-Ávila et al.2016, p.43).

En el KFLM se encuentra el conocimiento que el profesor tiene sobre cómo piensan los estudiantes y cómo construyen los conocimientos al resolver determinadas actividades matemáticas. En este sentido, un profesor con este tipo de conocimiento, debe ser capaz de reconocer errores frecuentes, áreas de dificultad y conceptos erróneos en las producciones de los estudiantes (Carrillo- Yañez et al., 2018). Por ejemplo, el docente debería ser capaz de reconocer que al ver la imagen presente en la *Figura 3*, muchos estudiantes responden que la zona gris representa $\frac{3}{4}$ del círculo. Esta respuesta se debe a un error en el concepto que se relaciona con “no tener en cuenta la equidad de las partes” (Pazos, 2009, p.42). Este error es reportado en la literatura como frecuente en las producciones de los estudiantes.

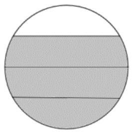


Figura 3: *Equidad de las parte*

Carrillo- Yañez et al. (2018) señalan que el conocimiento relacionado a los aspectos emocionales del aprendizaje, como, por ejemplo, conocer qué motiva a los estudiantes, sus intereses y expectativas también forman parte del subdominio.

Las principales fuentes de este conocimiento son la propia experiencia docente y los resultados de la investigación educativa (Flores-Medrano, Montes et al., 2016).

Con el fin de resumir las diferentes categorías de análisis que se fueron mencionando sobre este subdominio, Carrillo-Yañez et al. (2018, p.12), han creado un esquema que identifica cuatro categorías, a saber: (1) Teorías del aprendizaje matemático, (2) Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas, (3) Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático y (4) Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas.

6.3.2.3 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de la Matemática (KMLS)

Este subdominio refiere al conocimiento del profesor sobre lo que un estudiante, de determinado nivel escolar, puede aprender. Cabe destacar que el grado de profundidad con el que un estudiante pude aprender determinado contenido matemático también va a depender del nivel educativo donde se encuentre.

Por otra parte, dentro del KMLS se encuentra el conocimiento sobre la secuenciación de los contenidos, establecidos en el curriculum oficial, así como los fundamentos de esta secuenciación. Por ejemplo, el conocimiento de aquello que se espera aprendan sobre fracciones los estudiantes escolares de primer año o de sexto años es un conocimiento que forma parte de este subdominio.

Para conocer los estándares de aprendizaje, el profesor, puede consultar fuentes curriculares oficiales y no oficiales y resultados de investigación (Flores-Medrano, Montes et al., 2016).

Con el fin de resumir las diferentes categorías de análisis que se fueron mencionando sobre este subdominio, Reyes Camacho y Sosa Guerrero (2019, p.108), han creado un esquema que identifica tres categorías, a saber: (1) Expectativas de aprendizaje, (2) Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y (3) Secuenciación de los temas.

Teniendo en cuenta los objetivos de la presente investigación y el modelo MTSK descrito en esta sección, es importante aclarar que para profundizar en el estudio se han seleccionado los subdominios KoT y KFLM antes presentados. Además, como se observa en este apartado, las categorías señaladas para cada subdominio son genéricas por lo que requieren adaptaciones. Dichas adaptaciones se realizaron teniendo en cuenta el concepto matemático que se enuncia en los objetivos de este trabajo, a saber: fracción en su interpretación parte-todo.

En lo que sigue desarrollamos el concepto matemático que posteriormente permite adaptar los subdominios del modelo.

6.4 El Concepto de Fracción

En el recorrido por las diferentes lecturas se puede apreciar que el concepto de fracción forma parte de todos los ciclos escolares en sus múltiples significados. Estos significados muchas veces no están claros para los estudiantes y es por ello que, pese a encontrarse cursando niveles avanzados, las dificultades perduran en el tiempo.

A partir de lo anterior y teniendo en cuenta los objetivos de la presente investigación resulta fundamental definir el concepto de fracción y diferenciarlo de otros conceptos, que muchas veces se confunden.

Según reportan Fandiño Pinilla (2007) los docentes de matemática, muchas veces, desconocen la diferencia que existe entre el concepto de fracción y el concepto de número racional. Estos dos conceptos están sumamente ligados y por tal motivo se tiende a confundirlos. En el recorrido teórico vemos que existe una extensa bibliografía matemática que abordan el concepto de número racional y fracción entre los cuales destacamos los trabajos de Giovaninni (2012), Vázquez et al. (1993), Osin (1996) y Cólera Jiménez et al. (2018). De todos estos aportes teóricos el libro Introducción al análisis matemático de Osin (1966) se ha tomado como referencia por presentar un planteo en el cual se diferencian el concepto de fracción del de número racional explícitamente. El autor define número racional a partir de clases de equivalencia y posteriormente, se deduce el concepto de fracción, no como cociente de enteros, como lo plantea gran parte de la bibliografía, sino como un símbolo que representa a un número racional. El aporte teórico de Osin nos permite visualizar claramente el vínculo entre ambos conceptos y poder determinar las diferencias subyacentes entre ellos. A continuación, se expone el concepto de número racional aportado por Osin (1966):

> Consideramos el conjunto de las parejas ordenadas:(a, b), con a entero y b entero no nulo.
>
> Establecemos la relación: $(a, b) \sim (c, d)$ cuando $ad = cb$.
>
> Esa relación es de equivalencia, pues cumple las propiedades:
>
> IDÉNTICA. $(a, b) \sim (a, b)$, ya que $ab = ab$.
>
> RECÍPROCA. Hipótesis: $(a, b) \sim (c, d)$. Tesis: $(c, d) \sim (a, b)$.
>
> TRANSITIVA. Hipótesis: $\begin{matrix}(a, b) \sim (c, d) \\ (c, d) \sim (e, f)\end{matrix}$ Tesis: $(a, b) \sim (e, f)$
>
> La relación de equivalencia definida establece, en el conjunto de las parejas, una partición en clases de equivalencia, que serán llamadas **números racionales**.
>
> Como alcanza con una pareja para determinar la clase, indicaremos con $R(a, b)$ o también con el símbolo más frecuente: a/b, al racional del que la pareja (a, b) es representante.
>
> Así por ejemplo, la clase de parejas equivalentes a la $(2,3)$ se indicará como el racional: $2/3$.No debe entenderse esto como una división de enteros, sino como un símbolo (llamado fracción), que representa un número racional. (Osin, 1966, pp.132-133)

En la definición de Osin queda claro que el concepto de número racional y el de fracción son significativamente distintos. Mientras que el primero refiere a una clase de equivalencia, el segundo hace referencia a un símbolo que permite representar a la clase. Es importante aclarar que esta tesis centra su estudio en el concepto de fracción positiva con numerador y denominador natural ya que son las que aparecen en los programas escolares. En lo que sigue se caracteriza a este tipo de fracciones.

Para hacer alusión al concepto de fracción Llinares y Sánchez (1997) se refieren al término como un megaconcepto. Los autores reportan que para comprenderlo hay que tener en cuenta los subcontructos e interpretaciones que de él se derivan. En tal sentido Rojas (2014) en su tesis doctoral indica que "(...) la expresión fraccionaria en particular, es uno de los conceptos más complejos que los estudiantes abordan en sus primeros años escolares, al aparecer bajo distintos significados (parte-todo, medida, cociente, operador, razón) que se relacionan entre sí." (p.24).

Tomando en cuenta los distintos aportes teóricos de Llinares y Sánchez (1997), Gairín Sallán y Sancho Rocher (2002), Charalambous y Pitta-Pantazi (2007), Gallardo et al. (2008), Rojas (2014) se pueden precisar las siguientes interpretaciones para el concepto de fracción:

Fracción como relación parte-todo: esta interpretación tiene lugar cuando un “todo” (unidad) se divide en partes congruentes, destacando algunas de ellas. El todo es lo que se llama denominador de la fracción y las partes representan al numerador (Llinares y Sánchez, 1997). Este significado de la fracción será ampliado más adelante.

Fracción como cociente: esta interpretación asocia a la fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$ con la operación de dividir un número natural a entre otro número natural b no nulo (Llinares y Sánchez, 1997). Según Gairín Sallán y Sancho Rocher (2002) cuando la fracción adopta este significado puede interpretarse de dos maneras: como reparto, es decir como el resultado que recibe cada uno cualquiera de los b entre los que se han repretido a unidades o como la cantidad de magnitud que resulta de distribuir a unidades entre b. Un ejemplo de esta interpretación se podría ver al solicitar “repartir 2 chocolates entre 4 personas”.

Fracción como medida: esta interpretación se vincula con la necesidad de medir cantidades de magnitudes que no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida (Gallardo et al., 2008). Por ejemplo cuando se intenta responder a la pregunta “¿Cuánto mide en centímetros un segmento AB (que no entra una cantidad entera de veces)?” y la respuesta es $0{,}5\ cm$ o $\frac{1}{2}\ cm$. En este sentido, Gairín Sallán y Sancho Rocher (2002) reportan:

> El significado de la fracción $\frac{a}{b}$ como medida será el de la cantidad de magnitud que se ha comparado con la unidad de medida, comparación que se ha efectuado con la subunidad $\frac{1}{b}$ de la unidad, siendo a el número de veces que dicha subunidad está contenida en la cantidad a medir. (p.176)

Fracción como razón: en este caso la fracción se interpreta como un índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud (Llinares y Sánchez, 1997). Este significado se puede ver al comparar los cardinales de dos conjuntos o cuando se comparan una cantidad de magnitud y el cardinal de un conjunto (Gairín Sallán y Sancho Rocher, 2002). Por ejemplo comparar las medidas de un segmento MN de 40 cm y la de otro PR de 50 cm es un claro ejemplo de este significado de la fracción, el primer segmento son $\frac{4}{5}$ del segundo.

Fracción como operador: en este caso la fracción es vista como una función que es aplicada a un número, objeto o conjunto (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007). Por ejemplo cuando se solicita “Hallar $\frac{4}{7}$ de un conjunto de 49 alfajores”, en este caso la fracción actúa como operador y para llegar a la respuesta realizamos $(49 \div 7) \times 4$ obteniendo 28.

Según Llinares y Sánchez (1997) en la enseñanza es difícil aislar cada una de las interpretaciones de fracción antes descritas. Los autores indican que estas interpretaciones poseen vínculos que no pueden ser ignorados, estos vínculos son reportados por Behr et al. (1983, p.100) citados en Llinares y Sánchez (1997) y se pueden ver en la Figura 4.

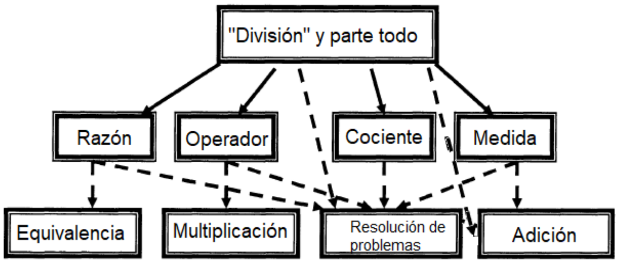


Figura 4: *Relaciones entre las interpretaciones del concepto de fracción (Behr et al., 1983, p.100).*

En el anterior esquema Llinares y Sánchez establecen que las flechas continuas indican relaciones establecidas, mientras que las discontinuas establecen relaciones que se conjeturan. Por lo que se puede observar en el esquema el concepto parte-todo se vincula mediante una relación establecida con el concepto de medida. En tal sentido se hace necesario precisar que, en este trabajo, el concepto de medida será considerado como una forma de interpretar a la relación parte-todo pues permite explicar algunas dificultades. Estas últimas serán reportadas más adelante.

Por otra parte, al observar la *Figura 4* podemos afirmar que la interpretación de fracción como parte-todo es fundamental para desarrollar otras de las interpretaciones del concepto (Llinares y Sánchez, 1997).

En la siguiente sección realizaremos un análisis más detallado del significado de fracción como relación parte-todo, por ser central para nuestro estudio.

6.5 La Fracción Como Relación Parte-Todo

La fracción interpretada como relación parte-todo es definida por Llinares y Sánchez (1997):

> (...) un "todo" (continuo o discreto) se divide en partes "congruentes" (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de "objetos"). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que pueden estar formado por varios "todos"). El todo recibe el nombre de unidad. (p.55)

En la anterior definición se menciona que el "todo" puede ser discreto o continuo. El "todo" continuo implica tener una magnitud medible que en general es superficie (o longitud), mientras que el "todo" discreto implica tener una colección de objetos donde la magnitud medible es la cardinalidad (Gairín Sallán y Sancho Rocher, 2002).

Por otra parte, Obando (2003) para hacer referencia a la fracción como relación parte-todo indica que es "(...) un número que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad tomada como unidad (todo) y otra cantidad tomada como parte. El establecimiento de tal relación cuantitativa implica un proceso de medición." (p.165). El autor enfatiza la relación parte-todo en la medición y no en el tratamiento característico escolar que implica partición y conteo, indicando que esta última interpretación muchas veces acarrea dificultades.

Piaget, Inhelder y Szeminska (1960) citados en Llinares y Sánchez (1997) reportan siete atributos para caracterizar a la relación parte-todo:

1. Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.
2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El "todo" se puede dividir en el número de partes pedido.
3. Las subdivisiones cubren el "todo"; ya que algunos niños cuando se les pedía dividir un pastel entre tres muñecos, cortaban tres trozos e ignoraban el resto.
4. El número de partes no coincide con el número de cortes.
5. Los trozos –partes- son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño-congruentes-.
6. Las partes también se pueden considerar como totalidad.
7. El "todo" se conserva. (pp.80-81)

Posteriormente Payne (1976) citado en Llinares y Sánchez (1997) agrega cuatro atributos más a la anterior lista:

8. Control simbólico de las fracciones, es decir, el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones.
9. Las relaciones parte-todo en contextos continuos y discretos.
10. Las fracciones mayores a la unidad.
11. Subdivisiones equivalentes. (p.81)

Estos atributos pueden originar, en el trabajo con tareas que involucran el concepto de fracción como parte-todo, algunas dificultades y errores conceptuales. Más adelante se profundiza en estas dificultades y errores, explicando cuáles son y por qué aparecen según los investigadores.

6.5.1 Distintas Representaciones Para la Relación Parte-Todo

Castro-Ródríguez et al. (2016) se refieren al término "representaciones" indicando que son esquemas o imágenes con las que las personas trabajan sobre ciertos conceptos matemáticos. Dichas representaciones pueden ser internas o externas. En este sentido, Hiebert y Carpenter (1992) citados en Castro-Ródríguez et al. (2016) expresan:

> Para pensar y comunicar ideas matemáticas necesitamos representarlas de alguna manera. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, en forma de lenguaje hablado, símbolos escritos, imágenes u objetos físicos (...) Para pensar en ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que la mente pueda operar sobre ellas. (p.131)

La relación parte-todo la podemos representar usando palabras formales, representaciones gráficas o simbólicas, estas según Castro-Rodríguez et al. (2016) son las formas convencionales.

Por otro lado, Llinares y Sánchez (1997) coinciden en las anteriores formas de representación para la relación parte-todo, agregando la representación concreta. En tal sentido, los autores indican que las diferentes representaciones que se pueden tener del concepto son: concreta, oral, escrita y diagrama. En el esquema de la Figura 5 se observan las distintas representaciones del concepto, indicando con dobles flechas, las traslaciones que son deseables se establezcan para conceptualizar la relación parte-todo.

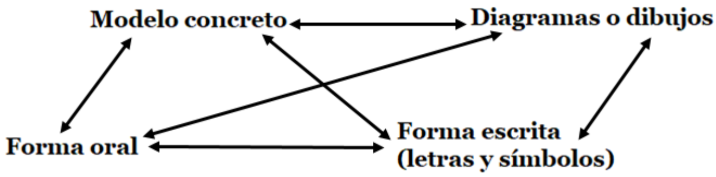


Figura 5: *Representaciones de la relación parte-todo (Lesh, 1983) citado en Llinares y Sánchez (1997)*

En el presente trabajo se priorizan las representaciones: escrita (simbólica), oral (lenguaje natural) y diagrama o dibujo. Se deja de lado el modelo concreto por tratarse de una representación que es usada frecuentemente con estudiantes que recién se inician en el concepto.

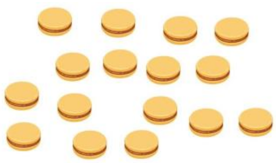
6.5.2 Naturaleza de la Unidad y Tipo de Magnitud Para la Relación Parte-Todo

Como ya se mencionó anteriormente Llinares y Sánchez (1997) indican diferentes contextos para el uso de la relación parte-todo. El primero que mencionan es el continuo que en general permite asociar una fracción con el área de una parte de una figura. El segundo que indican es el discreto que permite asociar una fracción con un subconjunto de un conjunto de objetos. Y el último es el que permite asociar una fracción con puntos de la recta numérica. Los autores reportan que los diferentes contextos presentan diferentes niveles de dificultad, siendo el más sencillo el contexto continuo y los más complejos el contexto discreto y de la recta numérica.

Por otro lado, Obando (2003) en lugar de diferenciar contextos, como hacen Llinares y Sánchez, establece diferencias en el tipo de magnitud (longitud, área, discreta) que se trabaja y en el tipo de unidad (simple o compuesta). Veamos que el tipo de magnitud que reportan Obando es sinónimo de los contextos continuo y discreto, indicados por Llinares y Sánchez. En lo que sigue ejemplificamos situaciones en las que se observa trabajo con diferentes tipos de unidad y magnitud, así como el vínculo entre esta denominación y la establecida por Llinares y Sánchez.

Haciendo una recorrida por los distintos materiales escolares tales como tareas de clase y libros, podemos observar el uso de los diferentes contextos reportados por Llinares y Sánchez y de las diferentes unidades y magnitudes indicadas por Obando, ver Tabla 5. Cabe destacar que los ejemplos presentados en dicha tabla son de construcción personal.

Tabla 5: *Situaciones en las que se visualiza la relación parte-todo*

Situación 1	**Situación 2**	**Situación 3**
 ¿Cuánto mide el segmento AB si consideramos como segmento unidad la longitud del segmento AC?	Pinta de gris ¾ de la figura. 	Pinta ¾ de los alfajores. 

Fuente: Tabla de elaboración propia.

En la primera situación, que se ilustra en la Tabla 5, se hace referencia a la magnitud longitud (contexto continuo), la segunda hace referencia a la magnitud superficie (contexto continuo) y la tercera situación hace referencia a la magnitud cantidad de alfajores (contexto discreto).

Además, podemos ver que en la primera y segunda situación se trabaja con una unidad simple pues se obtiene el resultado final partiendo el todo en cuatro partes iguales o congruentes y tomando tres de ellas. Mientras que la tercera situación implica el trabajo con una unidad compuesta, lo que la hace más compleja según Obando (2003). En esta última situación se debe reconocer a los dieciséis alfajores como la unidad, dividirlos en cuatro partes iguales, identificar cada parte obtenida como $\frac{1}{4}$ de la unidad (dieciséis alfajores) y finalmente, agrupar tres de estas cuatro partes.

A partir de lo anterior se puede observar la importancia de destacar, en el trabajo con la relación parte-todo, el tipo de unidad con la que se trabaja (simple o compuesta) y el tipo de magnitud (continua y discreta). En general, no se trabaja de forma cuidadosa el tipo de magnitud ni el tipo de unidad, lo que según Obando (2003) genera dificultades en los procesos de conceptualización de los alumnos.

Para el presente estudio vamos a considerar como contextos para el uso de la relación parte-todo: continuo y discreto. Estos contextos están vinculados con el tipo de unidad y magnitud, como se puede visualizar en los ejemplos anteriores. Dentro del contexto continuo se consideran las magnitudes área y longitud.

6.6 Dificultades en el Aprendizaje de las Fracciones Como Relación Parte-Todo

En esta sección se hace referencia a tres conceptos diferentes pero que guardan estrecha relación, a saber: error, dificultad y obstáculo. Estos tres conceptos suelen confundirse por lo que nos parece importante precisarlos.

Cuando hablamos de error estamos haciendo referencia a las producciones que aparecen durante el aprendizaje de los alumnos (Rico, 1995). Brousseau, Davis y Warner citados en (Rico, 1995) señalan que “los errores de los alumnos son, con frecuencia, el resultado de un procedimiento sistemático que tiene alguna imperfección; pero el procedimiento imperfecto lo utiliza el alumno de modo consciente y con confianza.” (p.8).

El término dificultad está estrechamente relacionado con el de error pues supone aquellas barreras que el estudiante deberá superar para trabajar con determinados conceptos. En este sentido, Rico (1995) reporta que existen algunas dificultades que pueden derivar en errores posteriores. Por ejemplo, algunos estudiantes presentan dificultades para procesar información matemática que está dada en algún tipo de representación icónica, esto puede derivar en la producción de ciertos errores.

En otro sentido Bachelard usa el término obstáculo para explicar de cierta forma la aparición inevitable de errores (Rico, 1995, p.4). Muchas veces los estudiantes tienen una visión limitada de un cierto concepto, lo que se genera porque dichos conceptos son trabajados en ciertos campos y situaciones. Pero basta con introducir un cambio en el contexto de utilización del concepto para que el conocimiento aparente que tenía el estudiante no funcione. Según Cid (2000) "(...) es usual que frente a situaciones problemáticas nuevas el sujeto que tenía una concepción básica del concepto se resista a rechazarla y trate, a pesar de la constatación de su fracaso, de mantenerla, de adaptarla localmente, de hacerla evolucionar lo menos posible." (p.2) es a esta concepción que se denomina obstáculo. Es importante destacar que los obstáculos se pueden manifestar a través de los errores que producen los estudiantes, dichos errores no son azarosos y de hecho persisten (Cid, 2000, p.2).

El concepto de obstáculo según Brousseau (1989a) citado en Cid (2000) es un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento (p.2). Dicho conocimiento produce respuestas correctas en un cierto contexto mientras que fuera de él genera respuestas falsas. Asimismo, es resistente a las contradicciones y convive con otras concepciones "mejores" del concepto.

Es habitual que algunas prácticas escolares obstruyan la construcción de conceptos matemáticos. El trabajo con las fracciones en su interpretación parte-todo no escapa a lo antes expresado y de hecho, acarrea algunas dificultades importantes. Dificultades que posteriormente generan conflictos en la comprensión de las fracciones y en general, en la conceptualización de número racional.

En su trabajo, Pazos (2009) reporta algunas prácticas que fomentan posteriores obstáculos para la comprensión del concepto de fracción. El primer obstáculo que menciona es el trabajo sostenido, generalmente, en representaciones gráficas, esto fomenta el significado parte-todo de la fracción, dejando de lado los demás significados. El segundo obstáculo que identifica se vincula con el uso del mismo tipo de representación, en general, se utilizan representaciones tales como rectángulos y círculos. Y el tercer obstáculo que reporta se vincula con la preferencia por magnitudes continuas por sobre las discretas (Pazos, 2009, p.40).

Los obstáculos mencionados en el párrafo anterior, junto con la complejidad del concepto de fracción, abren paso a algunas dificultades en el trabajo con la fracción en su interpretación parte-todo. En particular, como ya se señaló, el término dificultad supone aquellas barreras que el estudiante deberá superar para trabajar con determinados conceptos. Dichas dificultades son reportadas por diferentes investigadores tales como León-Mantero et al. (2016), Pazos (2009), Fandiño Pinilla (2007), Obando (2003), Cid et al. (2003), Llinares y Sánchez (1997) y se manifiestan en los errores que cometen los estudiantes. En lo que sigue se explicitan las dificultades reportadas por los investigadores.

La primera dificultad que se destaca es reportada por los investigadores Pazos (2009) y Obando (2003) y se vincula con la práctica de centrar la atención en el conteo de partes, no relacionando las partes y el todo. Obando señala que se visualiza a la fracción como dos números naturales separados por una rayita. En particular, si se da a un estudiante un rectángulo dividido en cuatro partes iguales donde una de estas partes está pintada, para reconocer la fracción, el estudiante simplemente debería contar el total de partes en que se dividió la unidad y la cantidad de partes pintadas, siendo los números que surgen de este conteo el denominador y numerador respectivamente, ver Figura 6 (A). Sin embargo, si se da una zona pintada del rectángulo sin mostrar las partes en que fue dividido, el estudiante deberá establecer la relación entra las partes y el todo para poder así identificar la fracción, ver Figura 6(B).

Figura 6*: Dificultad referente al conteo de partes*

La segunda dificultad es identificada por Pazos (2009), Fandiño Pinilla (2007) y Obando (2003) y refiere a la independencia de la forma. En referencia a este problema, Obando (2003) indica que como el proceso de partición no se basa, en general, en la medida de la magnitud se prioriza la visualización atendiendo a la congruencia geométrica entre las partes (p.169). Por ejemplo, si observamos las divisiones realizadas en los rectángulos de la Figura 7, las formas son distintas. Mientras que la superficie de cada parte, en ambos rectángulos, es la misma. El estudiante debería ser capaz de reconocer que cuando se trabaja con la misma unidad (en este caso el rectángulo), las partes pueden ser equivalentes en superficie.

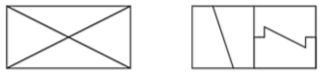


Figura 7*: Dificultad sobre la independencia de la forma*

En tercer lugar, los investigadores Pazos (2009) y Llinares y Sánchez (1997) indican que los estudiantes presentan dificultades al no tener en cuenta la propiedad que establece la equidad de las partes. Al presentar la Figura 8, algunos estudiantes que manifiestan este tipo de dificultades podrían llegar a contestar que la zona pintada de gris representa $\frac{3}{4}$ del área total del círculo.

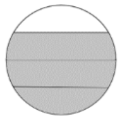
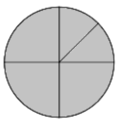


Figura 8: *Dificultad equidad de las partes*

La cuarta dificultad reportada por Pazos (2009) se vincula con el tratamiento de fracciones mayores a la unidad. Este tipo de fracciones no se eligen para el trabajo escolar ya que resultan menos intuitivas para los estudiantes. Al trabajar con fracciones mayores a la unidad hay algunos tipos de tareas que pierden sentido. Por ejemplo, las tareas que implican pintar partes de un todo tienen más sentido para fracciones menores a la unidad que para fracciones mayores a la unidad. De hecho como reporta (Poveda, s.f) cuando se solicita a un estudiante pintar ¼ de un círculo lo pude hacer sin problema, pero cuando se pide pintar 5/4 lo hace de forma errónea dividiendo uno de los cuarto a la mitad para que queden cinco partes pintadas, esta dificultad se observa en Figura 9. Es por esto que decimos que al trabajar con la relación parte-todo, dichas fracciones son menos intuitivas para los estudiantes y por tanto, se utilizan menos.



Al querer representar la fracción 5/4 algunos estudiantes dividen uno de los cuartos para obtener 5 partes

Figura 9*: Error al representar fracciones mayores a la unidad*

En relación a la anterior dificultad se reporta que la mayor cantidad de actividades que se proponen en el aula demandan trabajar desde la unidad ya dada. En este sentido, vemos que son pocas las actividades que requieren “reconstruir la unidad a partir de alguna de sus partes”, "reconstruir la unidad a partir de una fracción mayor que ella" o "representar una fracción a partir de otra fracción de la misma unidad" (Pazos, 2009, pp.42-43). Este tipo de actividades aparecen ejemplificadas en las situaciones A, B y C de la Figura 10, respectivamente.

(A)	**(B)**	**(C)**
La figura representa $\frac{2}{3}$ de la unidad.	La figura representa $\frac{3}{2}$ de la unidad.	La figura representa $\frac{4}{2}$ de la unidad.
Dibuja la unidad.	Dibuja la unidad.	Representa $\frac{3}{4}$ de la misma unidad

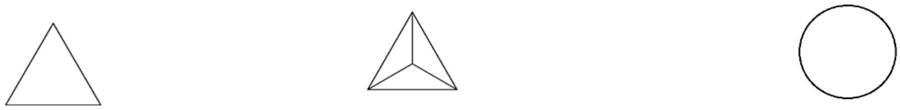


Figura 10*: Dificultad*

En quinto lugar, podemos observar que se genera otra dificultad al "no hacer hincapié en la relación número de partes y tamaño de las partes" (Pazos, 2009, p.44). En relación a esta dificultad, Obando (2003) indica que la puerta de entrada a ella es la falta de rigor en el tratamiento de la unidad. En algunas actividades usamos representaciones como las que aparecen en la Figura 11, las representaciones originan las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$, pero al observar que los dos cuadraditos pintados en las representaciones son iguales los estudiantes podrían llegar a indicar que las dos fracciones son iguales. En este caso las unidades consideradas son diferentes, cumpliéndose que a mayor número de partes, las partes son menores en referencia con la unidad.

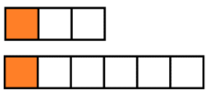


Figura 11: *Dificultad referente al número de partes y tamaño*

La sexta dificultad que podemos destacar es reportada por Poveda (s.f) y Obando (2003) y establece que "la equivalencia entre fracciones queda ligada a la congruencia de las partes en que se ha dividido la unidad" (Obando, 2003, p.170). Muchos estudiantes al observar las representaciones de la Figura 12 podrían llegar a decir que las fracciones que representan a las figuras A, B y C son diferentes. Tal afirmación se sustenta en comparar superficies pintadas de diferentes unidades ya que hay algunas de las superficies pintadas que son mayores que otras, es decir, si comparamos la superficie pintada en B esta es mayor que la superficie pintada en

A. El problema que se tiene es no vincular la zona pintada a la unidad respectiva. En tal sentido, si se compara la cantidad de superficie pintada considerando la superficie del rectángulo respectivo se obtendría que cada figura está representando a $\frac{1}{2}$. La equivalencia no se da porque las partes pintadas sean las mismas u ocupen la misma superficie, sino que se da por la relación cuantitativa entre las partes sombreadas y el todo.

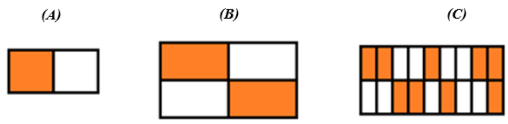


Figura 12: *Dificultad referente a representaciones equivalentes*

Otra dificultad que reportamos en cuanto a las fracciones equivalentes y que está vinculada a los atributos de la fracción que fueron reportados anteriormente tienen que ver con el no reconocer que las partes pueden ser también consideradas como un todo tal como indica Piaget et al. (1960) reportado en Llinares & Sánchez (1997). En este sentido, algunos estudiantes no identifican que las representaciones dadas en la Figura 13 son equivalentes pues ven que en una representación hay doce partes mientras que en la segunda representación hay 3 partes, no asociando que una de las partes de la segunda representación puede ser dividida en cuatro partes o lo que es lo mismo, que un conjunto de partes puede ser considerado como una parte.

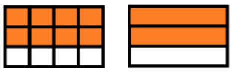


Figura 13*: Partes como totalidad y equivalencia de fracciones*

La séptima dificultad reportada se vincula con el tratamiento de magnitudes discretas (Obando, 2003). Muchas veces los estudiantes presentan dificultades para comprender que una multitud también puede ser una unidad, por ejemplo, en la actividad presente en la Figura 14 los estudiantes deberían reconocer que 16 alfajores representan a la unidad. En relación a esta dificultad, Llinares y Sánchez (1988) citados en León-Mantero et al. (2016) reportan que los estudiantes además presentan dificultades al intentar dividir un conjunto discreto en otros subconjuntos. En relación a esto último, y siguiendo con el ejemplo presente en la Figura 14 los estudiantes podrían llegar a presentar dificultades para encontrar que 4 alfajores representan a ¼ del conjunto. Podemos observar que los estudiantes, para dar respuesta al problema, deben realizar algunos pasos más que cuando trabaja con actividades similares, pero en contextos continuos.

Pintar 3/4 del total de alfajores.

Figura 14: *Dificultad magnitudes discretas*

Finalmente, Cid et al. (2003) identifican dificultades en reconocer la escritura para representar a un entero, pues explican que muchas veces identifican al entero y su inverso como equivalentes. Por ejemplo, para algunos estudiantes las representaciones 1/7 y 7/1 se corresponden con escrituras equivalentes.

Las dificultades que se describieron en esta sección fueron tenidas en cuenta para construir el cuestionario 1. Dicho cuestionario permitió obtener evidencias sobe el conocimiento matemático de los futuros maestros. Más adelante en la Tabla 8 se codifican las dificultades descritas para ser utilizadas posteriormente en la interpretación de las respuestas al cuestionario.

6.7 Adaptación del Modelo MTSK a los Objetivos

Teniendo en cuenta los aportes teóricos desarrollados en los apartados anteriores respecto al conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK) y la conceptualización de la fracción en su interpretación como relación parte-todo, en esta sección, se adapta el modelo MTSK a los objetivos de investigación.

Como se mencionó anteriormente, para el presente trabajo se decidió profundizar en la conceptualización de algunos de los subdominios del modelo MTSK. Esto se hizo debido a que dichos subdominios fueron los que permitieron abordar los objetivos de investigación propuestos. En particular, se decidió trabajar con los subdominios: Conocimiento de los Temas (KoT) y Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). Tal como se puede ver en el esquema de la Figura 15, el KoT se encuentra dentro del dominio Conocimiento Matemático (MK), mientras que el KFLM se encuentra dentro del dominio Conocimiento didáctico del contenido (PCK). Es importante aclarar que los objetivos 1 y 2 de la tesis se estudian con los aportes teóricos de los subdominios KoT y KFLM, respectivamente.

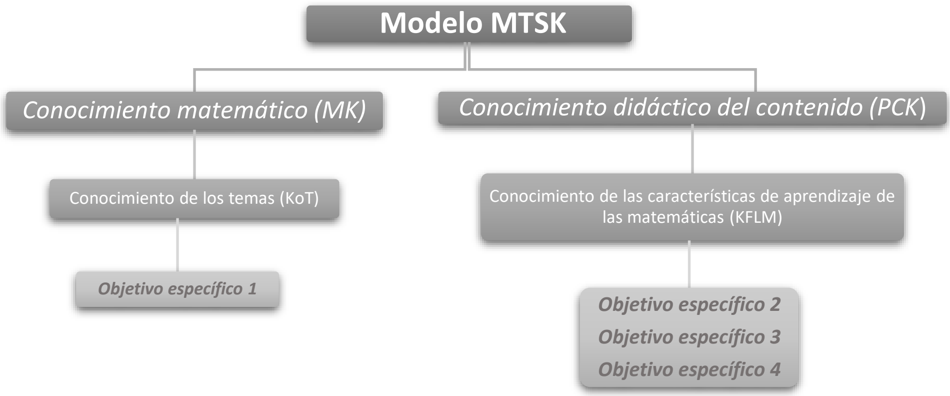


Figura 15: *Adaptación del modelo MTSK a los objetivos (elaboración propia)*

En la Tabla 6 se podrán observar las categorías de análisis e indicadores definidos para el subdominio Conocimiento de los temas matemáticos (KoT). Dicha tabla es de elaboración personal y fue creada teniendo en cuenta los aportes teóricos descritos anteriormente, así como también algunos de los indicadores reportados por Escudero-Domínguez et al. (2016).

Tabla 6: *Adaptación del subdominio KoT a los objetivos de investigación*

Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)
Procedimientos (P)
(P) Domina conceptos y procedimientos vinculados al concepto de fracción en su interpretación parte-todo. En particular: (P1) Vincula representaciones gráficas de fracciones, mayores o menores que la unidad, con su representación fraccional en diferentes contextos. (P2) Encuentra una cierta fracción de un conjunto. (P3) Reconstruye la unidad a partir de alguna de sus partes en diferentes contextos. (P4) Reconstruye la unidad a partir de una fracción mayor que ella en diferentes contextos. (P5) Encuentra una fracción a partir de otra fracción de la misma unidad en diferentes contextos.
Definiciones, propiedades y sus fundamentos (D)
(D) Conoce elementos de la estructura conceptual de la fracción en su interpretación como relación parte-todo. En particular: (D1) Reconoce la unidad con que se está trabajando en diferentes contextos. (D2) Reconoce el vínculo cuantitativo, en contextos continuos, entre las partes y el todo. (D3) Reconoce las partes y el todo en diferentes contextos. (D4) Reconoce a un cierto segmento como unidad. (D5) Reconoce la propiedad que deben cumplir las partes y el todo. Por ejemplo, la propiedad partes congruentes. (D6) Reconoce representaciones equivalentes cuando la unidad es la misma pero las divisiones dadas son distintas. (D7) Reconoce representaciones equivalentes cuando las unidades de referencia son distintas. (D8) Reconoce distintas representaciones gráficas para una misma fracción.

Fuente: Esta adaptación es de elaboración propia. Para dicha elaboración se tomaron como referencia los aportes de Rojas (2014)

En la Tabla 7 se podrán observar las categorías de análisis e indicadores definidos para el subdominio Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas. Dicha tabla es de elaboración personal y fue creada teniendo en cuenta los aportes teóricos descritos anteriormente, así como también algunos de los indicadores reportados por Escudero-Domínguez et al. (2016).

Tabla 7: *Adaptación del subdominio KFLM a los objetivos de investigación*

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)
Teorías del aprendizaje matemático (T)
(T1) Identifica imágenes de un concepto en producciones de escolares: En este sentido, el futuro profesor podría, por ejemplo, a partir de producciones de escolares, identificar qué imagen del concepto tienen los estudiantes escolares.
Fortalezas y debilidades en el aprendizaje del concepto de fracción (F)
(F1) Conoce errores o dificultades a priori. En este sentido, a partir de una actividad matemática el profesor puede anticipar errores o dificultades comunes que pueden llegar a enfrentar los estudiantes escolares al trabajar con el concepto de fracción como relación parte-todo. (F2) Reconoce, en las respuestas de estudiantes escolares, errores o dificultades comunes. En este sentido, a partir de producciones de estudiantes escolares los futuros maestros podrían identificar errores o no en respuestas de estudiantes y decir si estos son frecuentes al aplicar el concepto de fracción como relación parte-todo.
Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático (I)
(I1) Conoce procesos y estrategias que aplican los estudiantes al momento de enfrentarse a una actividad matemática. En este sentido, los futuros maestros podrían anticipar respuestas de estudiantes.

Fuente: Esta adaptación es de elaboración propia. Para dicha elaboración se tomaron como referencia los aportes de Rojas (2014)

Como se puede observar en el subdominio KFLM una de las categorías está vinculada con las dificultades y errores que presentan los estudiantes al trabajar con el concepto de fracción. En la Tabla 8 se resumen las dificultades que fueron encontradas en la literatura y explicadas con detalle en la sección 6.6.

En la adaptación del subdominio KFLM se hace mención a la idea de imagen conceptual. Este concepto según Vinner y Tall (1981) implica toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye propiedades y diferentes procesos que se asocian a él. Tal como indican los autores son todas las fotos mentales del concepto.

Tabla 8: *Dificultades presentes en la conceptualización de la relación parte-todo*

Dificultad	Descripción
D1	Centrar la atención en el conteo de las partes, priorizando el número de partes y no la relación entre la parte y el todo (Pazos, 2009, p.41) Según Obando (2003) la fracción es vista como dos números separados por una rayita
D2	Congruencia geométrica de las partes, no se reconoce independencia de forma cuando se trabaja con la misma unidad (Pazos, 2009; Fandiño Pinilla, 2007 y Obando, 2003)
D3	No se tiene en cuenta la equidad de las partes (Pazos, 2009, p.42)
D4	Tratamiento de fracciones mayores a la unidad (Pazos, 2009) **D4(A)** Reconocer fracciones mayores a la unidad en distintas representaciones gráficas **D4(B)** Reconstruir la unidad a partir de alguna de sus partes **D4(C)** Reconstruir la unidad a partir de una fracción mayor que ella **D4(D)** Representar una fracción a partir de otra fracción de la misma unidad
D5	Reconocimiento de la relación número de partes y tamaño de las partes (Pazos, 2009)
D6	• Equivalencia entre fracciones ligada a la congruencia de las partes en que se ha dividido la unidad (Obando, 2003, p.170) • No considerar que las partes también pueden ser un todo (Llinares y Sánchez, 1997)
D7	• Tratamiento de magnitudes discretas (multitud como unidad (Obando, 2003), dividir un conjunto discreto en otros subconjuntos (León-Mantero et al., 2016) • No reconocer a una colección como unidad (Obando, 2003) • Partir la colección en subconjuntos posibles según el número de elementos de la colección total. unidad (Obando, 2003) • Conceptualizar cada subconjunto como una parte de la unidad. unidad (Obando, 2003)
D8	Un entero y su inverso se identifican con escrituras equivalentes (Cid, Godino y Batanero, 2003)

Fuente: Tabla de elaboración propia.

7 Metodología

Antes de comenzar a definir la metodología del presente estudio es importante recuperar la pregunta central de esta investigación: *¿Cuentan los futuros maestros del Instituto Normal de Montevideo (IINN) con los conocimientos matemático y didáctico necesarios para poder enseñar el concepto de fracción en su interpretación parte-todo?* Dicha pregunta permitió definir el siguiente objetivo general: Explorar y generar conocimiento acerca del saber matemático y didáctico que poseen los estudiantes avanzados del Instituto Normal de Montevideo (IINN), en cuanto al concepto de fracción como relación parte-todo. Este objetivo general se abordó a partir los objetivos específicos que se indicaron en la sección 5.2.2.

Teniendo en cuenta la pregunta que orientó el estudio y los objetivos mencionados se identificaron los principales conceptos del trabajo. Estos conceptos articulados con el modelo teórico definido en el capítulo 6 permitieron decidir qué diseño de investigación se ajustaba mejor al estudio de la problemática. Todo esto abre paso a los apartados siguientes, donde se detalla: el proceso de la investigación, instrumentos de recuperación de datos y procesos de análisis de resultados.

7.1 Diseño de la Investigación

Tal como se señala en la introducción de este capítulo el diseño metodológico que se elige, responde a la necesidad de recabar evidencias que, en articulación con el marco teórico adoptado, permita alcanzar los objetivos de investigación propuestos.

Como se ha visualizado antes el problema de investigación abarca dos grandes conceptos, a saber: conocimiento matemático y conocimiento didáctico en cuanto al concepto parte –todo que caracteriza a la fracción. En este sentido y teniendo en cuenta la literatura que se ha consultado, se han reportado múltiples métodos de investigación. En general, las investigaciones que refieren al conocimiento matemático se vinculan con métodos cuantitativos, mientras que las referidas al conocimiento didáctico están más vinculadas a métodos cualitativos. Lo anterior es lo que nos conduce, en este trabajo, a la elección de un método de investigación de carácter mixto.

Los enfoques del tipo mixtos ofrecen variadas ventajas según Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2014). Una de las principales ventajas es la triangulación o incremento de la validez pues con la metodología mixta se puede verificar la convergencia de los hallazgos y contrastar los datos obtenidos por métodos cuantitativos y cualitativos, lo que permite tener una mayor validez interna y externa (Hernández Sampieri et al., 2014). Así mismo los autores señalan que el uso de datos y resultados cualitativos y cuantitativos permite contrarrestar las debilidades de alguno de los dos métodos, a esta ventaja le llaman compensación (Hernández Sampieri et al., 2014).

Por otro lado, Hernández Sampieri et al. (2014) indican que las metodologías mixtas dan mayor amplitud para abordar las distintas problemáticas pues permiten tener una visión más completa y unificada del problema de investigación. A su vez, al interpretar los datos cuantitativos y cualitativos conjuntamente, se tendrá mayor capacidad de explicación para el fenómeno de investigación (Hernández Sampieri et al., 2014).

Es importante destacar que este tipo de metodologías permiten reducir la incertidumbre ante resultados poco esperados, así como también encontrar contradicciones. En este sentido, Hernández Sampieri et al. (2014) manifiestan que un método puede ayudar a explicar evidencias inesperadas en el otro método.

Otras ventajas que destacan Hernández Sampieri et al. (2014) sobre las metodologías mixtas son la credibilidad y claridad. En cuanto a la credibilidad manifiestan que el uso conjunto de los dos métodos permite reforzar la confianza en los resultados y procedimientos (Hernández Sampieri et al., 2014). Mientras que sobre la claridad se indica que el uso de los dos métodos permite descubrir relaciones "encubiertas" que a veces se hace difícil descubrir al utilizar un solo método (Hernández Sampieri et al., 2014).

Por otro parte, el diseño de la investigación es exploratorio-descriptivo. Veamos que es exploratorio pues uno de los objetivos es explorar y generar conocimiento acerca de la problemática planteada. Y es descriptivo pues, a partir de los objetivos y de la problemática, se identificaron y describieron los conocimientos matemático y didáctico que demostraban poseer los futuros maestros. En este sentido, se intentó describir cómo era dicho conocimiento y cómo se encontraba este en relación a lo que se espera, en los programas escolares, que los futuros maestros enseñen.

Finalmente, es importante destacar que los dos métodos de investigación, cualitativo y cuantitativo, tuvieron la misma relevancia. En particular, se aplicaron los dos métodos de forma secuencial en el sentido reportado por (Hernández Sampieri et al., 2014), siendo aplicado primero el método cuantitativo y luego el cualitativo.

7.2 Población y Muestreo

Para llevar a cabo la investigación se ha elegido trabajar con un centro de formación docente público localizado en la ciudad de Montevideo. Dicho centro es el Instituto Normal de Montevideo (IINN).

Se decidió seleccionar a la institución antes mencionada pues según el informe del CFE (2019) la cantidad de egresos según centro educativo es mayor en el IINN que en los centros de formación docente del interior. En particular, se reporta en dicho informe que el promedio anual de egresos, desde el año 2011 hasta el 2017, en el IINN es de 140 estudiantes (CFE, 2019, p.13). El otro centro que le sigue en promedio de egresos es el Instituto de Formación Docente (IFD) de Paysandú, con un promedio de 79 estudiantes. Todos los demás centros presentan un promedio bastante inferior a los reportados, ver anexo 1.5.

Como ya se dijo la investigación tiene un enfoque mixto y es por ello que contempla dos etapas: la primera etapa es de corte cuantitativo y la segunda es de corte cualitativo. Para dichas etapas se han seguido diferentes procesos de muestreo, los que se detallan a continuación.

La población contemplada para la primera etapa (enfoque cuantitativo) de la investigación son todos los alumnos que cursan 4to año del IINN, que asciende aproximadamente a unos 200 estudiantes. De esta población objetivo se consideraron en la muestra aquellos estudiantes que voluntariamente aceptaron participar, obteniendo un número de 72 estudiantes en la muestra.

Para la segunda etapa de la investigación se opta por una muestra no probabilística que es seleccionada tomando en cuenta los resultados obtenidos en la primera etapa. En esta etapa se aplica un cuestionario que permite establecer tres niveles según los puntajes obtenidos (bajo, medio y alto). Luego del armado de los niveles se seleccionan aleatoriamente para la segunda etapa dos representantes del nivel bajo, tres del nivel medio y dos del nivel alto, obteniendo así la segunda muestra. Cabe destacar que más adelante se detalla con mayor profundidad el armado de los niveles que se mencionan en este párrafo.

Teniendo en cuenta todo lo antes descrito, puede verse que para cumplir los objetivos de la investigación se optó por un estudio de casos con los grupos de estudiantes de 4to año del IINN.

El estudio de caso tal como indican Marcelo et al. (1991) conlleva un examen sistemático, detallado, intensivo, en profundidad e interactivo del caso y es por ello que se lo prefiere. Es importante destacar que el estudio de caso no permite transferir los datos obtenidos fuera del caso por lo que los resultados no son generalizables (Marcelo et al., 1991).

7.3 Fases del Trabajo

En primer lugar, se realizó una entrevista (en lo que sigue entrevista 1), de carácter exploratorio, a docentes expertos de la institución elegida para la investigación (IINN). Los objetivos de tal entrevista fueron dos: aportar información relevante y validar uno de los instrumentos de la investigación. Estos últimos, se detallan en profundidad más adelante en la descripción de los instrumentos.

Posteriormente, se pasó al trabajo con los instrumentos que permitían recolectar información respecto a los objetivos. Para cada fase de la investigación se crearon y aplicaron diferentes instrumentos de recogida de datos. En la fase I y II se confeccionó, validó y aplicó un cuestionario (en lo que sigue cuestionario 1) de múltiple opción a los estudiantes avanzados de magisterio, que permitió recoger información en cuanto al objetivo específico 1. En la fase III se realizaron entrevistas (en lo que sigue entrevista 2), a una muestra de los estudiantes que habían contestado el cuestionario 1, que permitió recoger información en cuanto al objetivo específico 2, 3 y 4. La entrevista 2 es una adaptación de una herramienta ya aplicado por Ivars et al. (2016).

En la Tabla 9 se puede observar un detalle de las diferentes fases que contempló el trabajo de campo de la investigación. Además, se especifican los objetivos que se persiguieron en cada fase y el tipo de enfoque.

Tabla 9: *Esquema del trabajo*

Fases del trabajo	Enfoque	Objetivos
Fase I: Entrevista a expertos (entrevista 1) Diseño y validación del cuestionario 1.	Cuantitativo	Validar el cuestionario por expertos y modificarlos a partir de las sugerencias.
Fase II: • Ajuste del cuestionario 1 en relación a los comentarios de los expertos. • Aplicación del cuestionario 1 a los estudiantes de los grupos de 4to año del IINN	Cuantitativo	Recoger información en cuanto al conocimiento matemático que poseen los estudiantes del IINN en relación al concepto parte-todo que caracteriza a la fracción.
Fase III: • Adaptación de un cuestionario que fue usado en investigaciones anteriores por Ivars, Buforn y Llinares (2016) a entrevista. • Entrevistas a algunos de los estudiantes de 4to año del IINN	Cualitativo	Recoger información en cuanto al conocimiento didáctico que poseen los estudiantes avanzados del IINN. En particular, se recoge información sobre los objetivos específicos 2, 3 y 4.

Fuente: Tabla de elaboración propia.

Cabe destacar que la entrevista a expertos fue incluida en la fase I, tal como se indica en la Tabla 9 pues fue a partir de ella que se validó el cuestionario 1. Este cuestionario fue enviado por correo electrónico a tres expertos para que ellos enviaran sus comentarios y sugerencias.

En los apartados siguientes se describen los cuestionarios y entrevistas que aparecen nombrados en la Tabla 9.

7.4 Recolección de Datos

En la siguiente sección se detallan y describen los instrumentos de recolección de datos que fueron usados para recoger información sobre cada uno de los objetivos propuestos en este trabajo. Además, se realiza un análisis global de cada uno de los instrumentos.

7.4.1 Instrumentos

7.4.1.1 Entrevista1: Exploratoria a Expertos

Se seleccionan para la aplicación de la entrevista a dos expertos de la institución con una amplia trayectoria en la formación magisterial. Dichos expertos son docentes con formación de maestría y reconocidos en el campo de la educación por sus importantes contribuciones.

La entrevista a expertos fue dividida en dos partes pues cada parte permitía abordar objetivos diferentes. El primer objetivo refiere a corroborar algunos datos que se presentan en la justificación de la problemática, parte A de la entrevista (ver anexo 1.1). En esta parte de la entrevista se hacen 3 preguntas cuyos objetivos se describen a continuación.

La pregunta 1 permite conocer la opinión de los expertos en cuanto a la formación matemática magisterial. La pregunta 2 tiene como objetivo obtener más información sobre el programa matemático escolar pues al observar dichos programas no queda claro si existe algún porcentaje del horario escolar que se destine al trabajo matemático o si el tiempo queda librado a cada maestro. Y la pregunta 3 tiene como objetivo corroborar algunos datos del programa matemático magisterial en cuanto a la enseñanza de didáctica de la matemática en la carrera de magisterio.

La parte B de la entrevista (ver anexo 1.1) tiene como objetivo indagar aspectos relativos a la enseñanza del concepto de fracción en la formación matemática magisterial. Esta parte de la entrevista se divide en dos preguntas. La pregunta 1 permite conocer los distintos conceptos de fracción que se trabajan en la formación magisterial. Y la pregunta 2 permite visualizar qué características tiene la transposición didáctica que se hace del concepto de fracción como relación parte-todo.

Cabe destacar que el cuestionario 1 que se describe en el apartado siguiente, y que tenía como objetivo indagar el conocimiento matemático de los futuros maestros, se envió a los entrevistados y a un experto más por correo electrónico para ser validado. Las sugerencias fueron enviadas a la investigadora por correo electrónico y posteriormente son incorporadas al cuestionario para ser aplicado.

7.4.1.2 Cuestionario 1: A Estudiantes Avanzados de Magisterio

Tal como se planteó anteriormente, para dar respuesta al primer objetivo de investigación se confeccionó y aplicó el cuestionario 1. Dicho cuestionario tenía como fin recoger información sobre el conocimiento matemático que poseen los estudiantes de magisterio respecto al concepto de fracción en su interpretación como relación parte-todo.

El cuestionario es del tipo cerrado y consta de un total de 19 ítems, agrupados en 9 bloques, tal como puede observarse en el anexo 1.3. Para el armado de este cuestionario se tuvieron en cuenta los aportes teóricos del concepto parte-todo de la fracción reportados en este trabajo, así como también, los contenidos matemáticos que según el programa escolar deberán conocer los futuros maestros. Cada ítem del cuestionario consta de una opción correcta y de tres opciones incorrectas. Estos distractores fueron creados tomando en cuenta las dificultades reportadas en las secciones anteriores.

Por otra parte, cada ítem se construyó teniendo en cuenta distintas variables, a saber: contexto y tamaño de la fracción. En relación al contexto, se puede ver que hay ítems que implican el uso de representaciones en contextos continuos (C), otros en contextos discretos (D) y otros que implican el trabajo conjunto de los anteriores contextos denominadas mixtos (M). Respecto al tamaño de la fracción, se puede observar que hay ítems cuya respuesta o base está referido a fracciones mayores que la unidad (MA) y otros a fracciones menores a la unidad (ME). Todas las variables que se consideraron para confeccionar los ítems están resumidos en Tabla 10.

El cuestionario completo se encuentra en el anexo 1.3 y tal como se dijo antes está dividido en 9 bloques de preguntas. Cada bloque permite recoger evidencias sobre alguno de los aspectos teóricos de la fracción. En lo que sigue se explicitan los objetivos de cada bloque.

En primer lugar, el bloque 1 está compuesto por cuatro ítems y tiene como objetivo determinar si los estudiantes logran vincular representaciones gráficas, básicas de fracciones con su representación fraccional (a/b). Para poder vincular correctamente la representación gráfica el estudiante deberá en primer lugar reconocer correctamente la unidad que está involucrada y en segundo lugar reconocer la relación entre las partes y el todo. En esta pregunta se consideran representaciones de fracciones mayores y menores que la unidad, en contextos continuos y discretos.

El bloque 2 está compuesto por dos ítems y tiene como objetivo determinar si los estudiantes logran establecer relaciones cuantitativas entre cantidad de superficie pintada y el todo. En ambas preguntas las fracciones involucradas son menores que la unidad (ME) y están dadas en contexto continuo. Para dar respuesta a este bloque los estudiantes deberán comparar las partes pintadas en relación con el todo.

Por otra parte, el bloque 3 está dividido en dos objetivos distintos. Por un lado, el ítem 3.1 tiene como objetivo determinar si los estudiantes logran encontrar gráficamente una fracción menor que la unidad de un conjunto discreto. Y por otro lado, el ítem 3.2 tiene como objetivo determinar si los estudiantes reconocen la propiedad partes congruentes en representaciones del tipo continuas.

Los bloques 4, 5 y 6 están compuestos por dos ítems cada uno y están referidos a procedimientos. Tienen como objetivo determinar si los estudiantes logran: reconstruir la unidad a partir de alguna de sus partes, reconstruir la unidad a partir de una fracción mayor que ella o encontrar una fracción a partir de otra fracción de la misma unidad, respectivamente. En estos bloques se consideran fracciones mayores y menores que la unidad, en contextos continuos y discretos.

Por otro lado, el bloque 7 está compuesto por dos ítems y tiene como objetivo determinar si los estudiantes reconocen al segmento unidad como el todo. En tal sentido se consideran fracciones en contextos continuos mayores y menores que la unidad.

El bloque 8 está compuesto por dos ítems y tiene como objetivo determinar si los estudiantes reconocen representaciones equivalentes en contextos continuos. En este caso el ítem 8.1 permite trabajar con representaciones donde la unidad es la misma pero las particiones dadas son distintas en forma e iguales en superficie. Sin embargo, el ítem 8.2 permite ver diferentes representaciones gráficas para la misma fracción. En este último ítem las unidades de referencia son distintas pero la relación partes pintadas-todo es la misma.

Finalmente, el bloque 9 está compuesto por un único ítem y tiene como objetivo determinar si los estudiantes reconocen distintas representaciones gráficas para una misma fracción, menor que la unidad, en contextos continuos o discretos. Esta pregunta es la que posteriormente permitirá indagar en el conocimiento didáctico del contenido.

En la Tabla 10 se pueden observar las variables que se consideraron para construir el cuestionario en relación a cada ítem y un resumen de los objetivos que se indicaron anteriormente para cada bloque.

Tabla 10: *Objetivos de los ítems del cuestionario 1 y variables involucradas*

Bloque	Ítem	Contexto	Fracción-Tamaño	Objetivo
1	*1.1*	C	ME	Determinar si los estudiantes logran vincular representaciones gráficas de fracciones con su representación fraccional (a/b).
	1.2	C	MA	
	1.3	D	ME	
	1.4	D	MA	
2	*2.1*	C	ME	Determinar si los estudiantes logran establecer relaciones cuantitativas entre cantidad de superficie pintada y el todo.
	2.2	C	ME	
3	*3.1*	D	ME	Determinar si los estudiantes logran encontrar gráficamente una fracción menor que la unidad de un conjunto discreto.
	3.2	C	ME	Determinar si los estudiantes reconocen la propiedad partes congruentes en representaciones del tipo continuas.
4	*4.1*	D	ME	Determinar si los estudiantes logran reconstruir la unidad a partir de alguna de sus partes
	4.2	C	ME	
5	*5.1*	D	MA	Determinar si los estudiantes logran reconstruir la unidad a partir de una fracción mayor que ella
	5.2	C	MA	
6	*6.1*	D	ME	Determinar si los estudiantes logran encontrar una fracción a partir de otra fracción de la misma unidad.
	6.2	C	MA	
7	*7.1*	C	MA	Determinar si los estudiantes reconocen diferentes segmentos como unidad (todo).
	7.2	C	ME	
8	*8.1*	C	ME	Determinar si los estudiantes reconocen representaciones equivalentes en contextos continuos.
	8.2	C	ME	
9	*9.1*	M	ME	Determinar si los estudiantes reconocen distintas representaciones gráficas para una misma fracción, menor que la unidad, en contextos continuos o discretos.

Fuente: Tabla de elaboración propia.

7.4.1.3 Entrevista 2: A Estudiantes Avanzados de Magisterio

Por otra parte, se realizaron entrevistas a una muestra del conjunto de estudiantes a los cuales se aplicó el cuestionario 1. La selección de la muestra a la que se les realizó las entrevistas se hizo tomando en cuenta el nivel de respuesta dado al primer cuestionario, en tal caso, se seleccionaron de forma aleatoria dos individuos de nivel alto, tres de nivel medio y dos de nivel bajo.

Para determinar qué individuos conformaban cada uno de los niveles se otorgó un punto a las preguntas contestadas de forma correcta del cuestionario 1 y 0 a las incorrectas, obteniendo un puntaje total de 19 puntos. En este sentido, el puntaje mínimo que se podría obtener en el cuestionario 1 era de 0 puntos mientras que el máximo era de 19 puntos. Asimismo, a partir de los datos relevados en el cuestionario 1 se calcula la media y el desvío típico de dichos puntajes. A partir de la media y del desvío de los puntajes se generan los tres niveles. El nivel medio o rango 2 va a ser el que tiene como extremo inferior el valor de la media menos un desvío típico y como extremo superior el valor de la media más un desvío típico. De este modo los niveles o rangos 1 y 3 son los que quedan por debajo y por encima del rango 2, respectivamente.

La entrevista es semiestructurada y fue adaptada de un cuestionario aplicado en una investigación realizada por Ivars et al. (2016), dicha entrevista se puede ver en el anexo 1.4. La entrevista tiene como objetivo específico recoger información sobre el dominio conocimiento didáctico del contenido, en particular sobre el subdominio Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). En este sentido, se pretende que los futuros maestros analicen las respuestas presentadas por estudiantes escolares para la misma actividad que ellos antes resolvieron (bloque 9 del cuestionario 1).

La entrevista se dividió en dos partes, donde cada parte permitió recoger evidencias sobre diferentes aspectos del subdominio KFLM. En la primera parte de la entrevista se presenta una actividad matemática y se solicita a los futuros maestros que anticipen posibles respuestas que podrían dar los estudiantes escolares al resolverla. Esta parte tiene como primer objetivo observar si los futuros maestros conocen los errores más comunes que pueden llegar a cometer los estudiantes escolares, a priori. Y como segundo objetivo, observar si los futuros maestros conocen estrategias que aplican los estudiantes escolares al momento de enfrentarse a una cierta actividad matemática que implique el concepto de fracción como relación parte-todo.

La segunda parte de la entrevista consta de la presentación de tres respuestas de estudiantes escolares para la actividad matemática presentada. Las respuestas de los estudiantes escolares se muestran de a una a los futuros maestros y se solicita que las analicen. El primer objetivo de esta parte es observar si los futuros maestros evalúan correctamente las producciones de los estudiantes escolares. La evaluación que se realiza nos permite observar si los futuros maestros reconocen diferentes indicadores de la presencia de errores conceptuales o dificultades en las respuestas de los estudiantes. El segundo objetivo de esta parte es observar si los futuros maestros identifican diferentes imágenes conceptuales a partir de las producciones de los escolares. En este sentido, los futuros maestros podrían identificar procedimientos erróneos que aplican los estudiantes escolares e imagen pobres o contradictorias que se manifiestan sobre el concepto.

A lo largo de la entrevista 2, y a partir de las declaraciones de los entrevistados, se lograron identificar algunos de los conceptos matemáticos que fueron considerados para el cuestionario 1. En particular, se recogieron evidencias sobre los indicadores (D1) *Reconoce la unidad con que se está trabajando en diferentes contextos*, (D2) *Reconoce el vínculo cuantitativo, en* *contextos continuos, entre las partes y el todo*, (D3) *Reconoce las partes y el todo en diferentes contextos*, (D5) *Reconoce la propiedad que deben cumplir las partes y el todo* y (D7) *Reconoce representaciones equivalentes cuando las unidades de referencia son distintas*. Estos indicadores fueron definidos anteriormente para el subdominio KoT.

Lo mencionado en el párrafo anterior permitió triangular los hallazgos recogidos con el cuestionario 1 y la entrevista 2.

Respecto a la actividad matemática que se presenta en la entrevista, ver anexo 1.4, Ivars et al. (2016) reportan que los niños al intentar dar respuesta a la anterior deben realizar ciertos procesos matemáticos que son deseables sean identificados por los entrevistados. En tal sentido, se indica que los niños deben reconocer/identificar fracciones menores que la unidad, atendiendo a la relación entre las partes y el todo en varios tipos de representaciones diferentes de la unidad (círculo, rectángulo, fichas). Asimismo, los niños deberían reconocer que en dos de las representaciones las partes en que se dividió la unidad no son congruentes (A y C), pero sí lo son en las figuras B y D. Es importante destacar que la inclusión de las figuras F y E en dicha actividad brinda la posibilidad de "(...)que los niños movilicen la idea de que una parte puede ser dividida en otras partes lo que significa considerar un grupo de partes como una parte" (Ivars et al., 2016, p.55). A lo antes mencionado, agregamos que la inclusión de la figura F también permite visualizar a una colección como un todo que puede ser fraccionado en subgrupos.

En la Tabla 11 se puede ver una adaptación de un cuadro que presentan (Ivars et al., 2016, p.57) en cuanto a las características de las repuestas dadas por cada niño. Dicho cuadro indica los elementos matemáticos que están presentes en las respuestas de cada uno de los personajes que son presentados, en la entrevista, a los futuros maestros. En este sentido vemos, a partir de la respuesta de Víctor, que el escolar no tiene en cuenta la propiedad partes congruentes, tampoco tiene en cuenta que una parte puede estar dividida en otras partes (fracciones equivalentes en representaciones continuas) y no considera a un grupo de partes como una parte (fracciones en contextos discretos). La respuesta de la escolar Tere sí tiene en cuenta la propiedad partes congruentes, pero no tiene en cuenta ninguno de los otros dos elementos matemáticos. Y finalmente, en la respuesta de Álvaro se observan los tres elementos matemáticos considerados. Las respuestas de cada uno de los personajes y la actividad matemática presente en la entrevista se puede ver en el anexo 1.4.

Tabla 11: *Características de las respuestas de los tres niños*

		Víctor	Tere	Álvaro
Elementos matemáticos presentes en las respuestas de los niños	Las partes deben ser congruentes	No	Si	Si
	Una parte puede estar dividida en otras partes (fracciones equivalentes)	No	No	Si
	Considerar un grupo de partes como una parte (fracciones en conjuntos discretos)	No	No	Si

Fuente: Adaptación personal del cuadro aportado por Ivars et al. (2016, p.57)

En relación a lo indicado anteriormente se realiza a continuación un análisis personal a priori de la entrevista. Este análisis se hace en relación a las repuestas que podrían llegar a ofrecer los futuros maestros.

Pregunta A): ¿Cómo podría responder esta tarea un estudiante escolar?

En esta pregunta se espera que antes de ver las posibles respuestas de los estudiantes escolares los futuros maestros anticipen dichas respuestas o que generen otras. En este sentido, vemos que los futuros maestros podrían indicar diferentes respuestas atendiendo a las dificultades frecuentes que podrían afrontar los escolares al aplicar el contenido presente en la actividad.

Es importante destacar que, para dar cuenta de este conocimiento, los futuros maestros no deberían identificar como posible respuesta únicamente la respuesta correcta sino también aquellas que vienen acompañadas de errores frecuentes. Esto permitirá posteriormente dar cuenta del conocimiento que tienen los entrevistados acerca de la fortalezas y debilidades que se pueden derivar del concepto de fracción. En particular, las respuestas deberían recoger las dificultades (D3) “no tener en cuenta la equidad de las partes” (Pazos, 2009, p.42), (D6) no considerar a las partes como un todo (Llinares y Sánchez, 1997), (D7) tratamiento de magnitudes discretas: no reconocer la colección como la unidad y no considerar cada subconjunto como una parte de la unidad (Obando, 2003).

En esta pregunta, se les solicita a los futuros maestros que justifiquen sus respuestas a esta pregunta por lo que en sus argumentos podrán surgir diferentes estrategias que suelen aplicar los escolares al resolver la tarea. En este sentido, definimos seis estrategias posibles, a saber: (Estrategia 1) Observar en qué figuras hay cuatro particiones de las cuales tres están pintadas, (Estrategia 2) Observar en qué figuras hay cuatro particiones iguales de las cuales tres están pintadas, (Estrategia 3) Agrupar a un conjunto de objetos y considerarlos como una parte, (Estrategia 4) Observar a una parte dividida en varias partes y considerarla como una sola, (Estrategia 5) Elegir las figuras por familiaridad en el contexto escolar, (Estrategia 6) Descartar opciones por no ser familiares al contexto escolar.

Pregunta B): Se presentan posibles respuestas de estudiantes escolares (Víctor, Tere, Álvaro) y en cada una de ellas se pregunta

A) ¿Cómo corregirías la respuesta del alumno?

B) ¿Qué aprendizaje/conocimiento tiene el estudiante acerca de las fracciones?

C) ¿Qué fortalezas o debilidades presenta el estudiante respecto al concepto?

Para dar respuesta a la primera pregunta los futuros maestros podrán responder correcta o incorrectamente respecto a si las respuestas dadas por los estudiantes son acertadas o no. Con esta pregunta se pretende indagar si los futuros maestros son capaces de identificar, en el discurso de los niños, los elementos matemáticos presentes en Tabla 11. Siendo este otro insumo que les permitirá dar cuenta del conocimiento de errores frecuentes a la hora de aplicar el concepto de fracción.

La segunda pregunta que se realiza, en cuanto a qué conocimientos tienen los estudiantes, permitirá orientar a los entrevistados a identificar qué imagen sobre el concepto de fracción tienen los escolares. Con esto, los futuros maestros podrán reconocer procedimientos o imágenes acertadas o no que tengan los escolares sobre el contenido matemático.

Por otro lado, la tercera pregunta refiere a las fortalezas o debilidades que identifican en los discursos y tiene como objetivo que los entrevistados reconozcan los errores conceptuales en relación a: la propiedad partes congruentes, fracciones en conjuntos discretos y fracciones equivalentes.

A partir de lo antes mencionado se espera que en el discurso del personaje "Víctor" se reconozca que contestó incorrectamente en relación a las figuras A y C pues no reconoce que las partes no son congruentes. Además, los futuros maestros también podrían reconocer indicadores de la presencia de errores conceptuales en la respuesta identificando que el personaje "Víctor" comete los tres errores mencionados en la Tabla 11. En relación a esto último, podrían reconocer procedimientos erróneos que se están aplicando o anticipar qué otras figuras dan cuenta del error conceptual que presenta Víctor.

Respecto a la respuesta dada por el personaje "Tere", se espera que los futuros maestros indiquen que las opciones B y D que responde el personaje, efectivamente, representan a 3/4 y que el argumento para descartar a la figura A y C es correcto. En cuanto a las demás figuras que son consultadas al personaje “Tere” se espera que los estudiantes de magisterio respondan que el personaje no considera que una parte puede estar dividida en otras partes (fracciones equivalentes) o que un grupo de partes puede ser considerado como una parte (fracciones en conjuntos discretos), aludiendo así a errores que suele traer aparejado el concepto de fracción como relación parte-todo. Los entrevistados podrían explicar el procedimiento que aplica el personaje para luego identificar los errores conceptuales.

Finalmente, en la repuesta de “Álvaro” los futuros maestros deberían indicar que la respuesta es correcta y que los argumentos presentados incluyen todas las características reportadas en la Tabla 11. Es esperable que, en este personaje, los entrevistados, no identifiquen errores conceptuales y que, por el contrario, en caso de no haber detectado errores en las respuestas anteriores las puedan identificar a partir de la explicación brindada por el personaje.

Las entrevistas se llevaron a cabo por la plataforma *Zoom* bajo una licencia gratuita, siendo estas grabadas con el consentimiento de los entrevistados y transcritas, para su posterior análisis, los extractos de entrevistas según los indicadores se encuentran en el anexo 1.7. Es importantes destacar que a partir de las entrevistas se indaga, además del conocimiento didáctico de los futuros maestros, el conocimiento matemático (KoT). Esta doble finalidad de la entrevista es la que abre camino a triangular los hallazgos del cuestionario 1 con las repuestas dadas a la entrevista 2, como ya se mencionó anteriormente.

El carácter de las entrevistas fue mixto, alternando preguntas estructuradas con preguntas espontáneas que surgieron a partir de las respuestas dadas por los entrevistados.

8 Análisis e Interpretación de los Datos

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos luego de aplicar el cuestionario 1 y de hacer las entrevistas indicadas en capítulos anteriores. El cuestionario 1 fue aplicado a un total de 72 estudiantes avanzados de magisterio mientras que las entrevistas se le realizaron a un subgrupo de 7 estudiantes de los 72 que dieron respuesta al cuestionario 1.

Las evidencias recogidas son analizadas tomando en cuenta el marco teórico adoptado sobre el Conocimiento Especializado del Profesor para la Enseñanza de la Matemática (MTSK). Dicho marco junto con las evidencias reportadas en este apartado nos permitirá en el siguiente capítulo responder a las preguntas de investigación y cumplir con los objetivos propuestos en capítulos anteriores para este trabajo.

En primer lugar, se realiza un análisis descriptivo de los resultados obtenidos para el cuestionario 1. Dicho cuestionario consta de 9 bloques, donde cada bloque se corresponde con una cierta categoría del Conocimiento de los Temas (KoT) y permite recoger evidencias sobre los diferentes indicadores.

En segundo lugar, se realiza el análisis de las entrevistas teniendo en cuenta los indicadores definidos en capítulos anteriores para el subdominio Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM).

Finalmente, en la última sección de este capítulo se reportan los hallazgos sobre el KoT a partir de los datos recogidos en la entrevista 2 y se contraponen con los obtenidos en el cuestionario 1.

Los hallazgos reportados en este trabajo no se pueden generalizar por tratarse de un estudio local.

8.1 Categorías de Análisis del Cuestionario 1

El cuestionario 1 permitió recoger evidencias sobre las categorías Procedimientos (P) y Definiciones, propiedades y sus fundamentos (D) definidas para la dimensión Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT). En particular cada uno de los 9 bloques del cuestionario 1 permitía evidenciar la presencia de los diferentes indicadores que definen cada categoría.

Dichos indicadores fueron explicitados en secciones anteriores. En la Tabla 12 se realiza un resumen de las dos categorías y de los indicadores que cada bloque permite visualizar.

Tabla 12:*Categorías e indicadores de la dimensión KoT presentes en los distintos bloques del cuestionario 1*

Categoría	Indicador	Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5	Bloque 6	Bloque 7	Bloque 8	Bloque 9
(P) Procedimientos	P1	X								
	P2			X						
	P3				X					
	P4					X				
	P5						X			
(D) Definiciones, propiedades y sus fundamentos	D1	X								
	D2		X							
	D3	X		X						
	D4							X		
	D5			X						
	D6								X	
	D7								X	
	D8									X

Nota: Las entradas de la tabla P1, P2, etc. refieren a los indicadores que se pueden evidenciar.

Fuente: Tabla de elaboración propia.

8.1.1 Análisis General del Cuestionario 1: Conocimiento de los Temas (KoT)

Tal como se indicó en capítulos anteriores, el cuestionario 1 está integrado por 19 preguntas que están distribuidas en 9 bloques. Cada uno de estos permite explicar diferentes características del concepto de fracción como relación parte-todo.

Para observar una distribución general de respuestas correctas e incorrectas se dio un punto a las preguntas contestadas de forma correcta y 0 a las incorrectas, obteniendo un puntaje total de 19 puntos. En este sentido, el puntaje mínimo obtenido en el cuestionario fue de 4 puntos mientras que el máximo es de 19 puntos. Asimismo, a partir de los datos podemos ver que la media del puntaje es de 11,5 puntos aproximadamente, mientras que el desvío típico de dichos puntajes es de 3,8 puntos aproximadamente.

A partir de los datos reportados y tomando en cuanto el puntaje se establecen tres rangos. En este sentido, el rango de puntajes central o rango 2 va a ser el que tiene como extremo inferior el valor de la media menos un desvío típico y como extremo superior el valor de la media más un desvío típico. De este modo los rangos 1 y 3 son los que quedan por debajo y por encima del rango 2 respectivamente. En la Tabla 13 se muestra que un 14% de los estudiantes encuestados obtienen 7 puntos o menos en el cuestionario, 68% obtienen entre 8 y 15 puntos mientras que un 18% de estudiantes obtiene 16 puntos o más. En el anexo 1.6 se puede ver un gráfico donde se indica la distribución de los puntajes obtenidos.

Tabla 13: *Distribución de puntajes*

Rango	Puntaje mínimo	Puntaje máximo	Porcentaje de estudiantes comprendido en el rango
1	0	7	14%
2	8	15	68%
3	16	19	18%

Nota: Los extremos de los intervalos se aproximan al entero más cercano pues en el cuestionario no era posible obtener puntajes decimales.

Fuente: Elaboración propia usando *Software* JASP

En lo que sigue se analizará de forma descriptiva el porcentaje de acierto, error u omisión obtenido en cada bloque, así como también, las dificultades que se recogen a partir de las respuestas de los estudiantes.

Sobre el final de la sección, se realiza un resumen de los hallazgos a partir de los resultados obtenidos para el cuestionario 1.

8.1.1.1 Bloque 1

Este bloque de preguntas nos permite explorar los conocimientos que demuestran poseer los estudiantes encuestados en cuanto a las categorías *Procedimientos (P)* y *Definiciones, propiedades y sus fundamentos (D)* definida para la dimensión KoT. En particular, en estas categorías, recogemos evidencias sobre los indicadores (P1) v*incula representaciones gráficas de fracciones con su representación fraccional*, *(D1) reconoce la unidad con la que se está trabajando en diferentes contextos y (D3) reconoce las partes y el todo en diferentes contextos.* En la Tabla 14 se muestra un resumen de las preguntas y la frecuencia con la cual se eligió cada una de las opciones de respuesta, visualizando en color verde la opción correcta para cada pregunta y una columna final que indica la cantidad de encuestados que no respondieron a la pregunta indicada.

Tabla 14: *Cuestionario 1,bloque 1*

	A	B	C	D	En blanco	Porcentaje de acierto	Porcentaje de error	Porcentaje de omisión
Pregunta 1.1	0	1	71	0	0	98,6	1,4	0
Pregunta 1.2	38	28	3	1	2	38,9	58,3	2,8
Pregunta 1.3	69	0	3	0	0	95,8	4,2	0
Pregunta 1.4	53	4	0	15	0	20,8	79,2	0

Fuente: Elaboración propia usando *Software* JASP

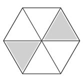
El bloque 1 tiene como objetivo determinar si los estudiantes logran vincular representaciones gráficas básicas de fracciones, dadas en diferentes contextos, mayores y menores que la unidad, con su representación fraccional, ver Figura 16 y Figura 17.

Los datos relevados en la Tabla 14 nos permiten afirmar, que en promedio un 63,5 % de los encuestados contesta de forma acertada a las preguntas del bloque 1. Esto permite afirmar que más de la mitad de los estudiantes encuestados logran vincular representaciones gráficas mayores y menores que la unidad con su representación fraccional en contextos continuos y discretos (P1), reconociendo la unidad de referencia (D1) y las partes (D3). Asimismo, podemos ver que, en promedio, un 35,8 % de los estudiantes no logra contestar a las preguntas del bloque de forma correcta mientras que un 0,7% omite contestarlo.

En las preguntas 1.1 y 1.2 los estudiantes deben reconocer las partes, el todo y el vínculo entre estas en representaciones continuas (D3), ver Figura 16. A partir de la información recabada podemos decir que en promedio un 68,8% logra reconocer de forma correcta las partes, el todo y la fracción representada en contextos continuos, un 29,8% lo hace de forma incorrecta y un 1,4% no lo hace.

Pregunta 1.1

Teniendo en cuenta que la unidad es el hexágono y que está dividido en 6 partes iguales.



¿Qué fracción representa la zona pintada de gris?

(A) 2/4

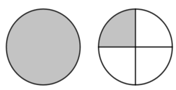
(B) 6/2

(C) 2/6

(D) 4/6

Pregunta 1.2

Teniendo en cuenta que el círculo es la unidad y que está dividido en 4 partes iguales.



¿Qué fracción representa la zona pintada de gris?

(A) 5/8

(B) 5/4

(C) 5/3

(D) 2/5

Figura 16: *Pregunta 1.1 y 1.2*

En cuento a las preguntas 1.3 y 1.4 que implican el reconocimiento de las partes, el todo y la fracción involucrada en representaciones donde la unidad es un conjunto discreto (D3), ver Figura 17, podemos ver que en promedio un 58,3% lo hace de forma correcta y un 41,7% lo hace de forma incorrecta.

En acuerdo con lo indicado por Obando (2003) y León-Mantero et al. (2016) el manejo de fracciones que implican el uso de magnitudes discretas resulta más complejo a los estudiantes. Tal como se reportó en los dos párrafos anteriores el 68,8% contesta de forma correcta a las preguntas donde la representación gráfica está sujeta a un contexto continuo mientras que un 58,3% lo hacen a las preguntas que implican el trabajo en contextos discretos.

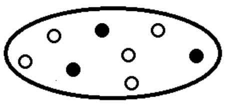
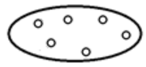
Pregunta 1.3	**Pregunta 1.4**
 ¿Qué fracción del total de las canicas del conjunto, son negras?	Se sabe que el total de las fichas dibujadas en la siguiente imagen representan la unidad.  ¿Qué fracción representan las fichas negras? 
(A) 3/8	(A) 9/12
(B) 3/5	(B) 9/3
(C) 8/3	(C) 4/7
(D) 5/3	(D) 3/2

Figura 17: *Preguntas 1.3 y 1.4*

Por otro lado, las preguntas 1.1 y 1.3 fueron en las que se obtuvieron mayor porcentaje de acierto pues son contestadas de forma correcta por un 98,6% y un 95,8% respectivamente. De forma contraria las preguntas 1.2 y 1.4 son las que tienen un porcentaje de acierto menor 38,9% y 20,8% respectivamente. En particular, la gran diferencia de acierto entre unas preguntas y otras radica en que en las dos primeras se pedía a los estudiantes vincular una representación gráfica menor que la unidad con su representación fraccional (P1), mientras que en las preguntas donde el porcentaje de acierto fue menor se pedía vincular una representación gráfica mayor que la unidad con su respectiva representación fraccional (P1).

A partir de lo mencionado en el último párrafo se infiere que los estudiantes encuestados presentan una notoria dificultad en el reconocimiento del “todo” (D1) cuando las fracciones involucradas son mayores a la unidad (Pazos, 2009) pese a que dicho “todo” sea explicitado. En consecuencia, podemos ver que tanto en la pregunta 1.2 como en la 1.4 la opción incorrecta más elegida es la A. Esto último permite evidenciar que para encontrar el numerador y el denominador de una fracción los estudiantes cuentan total de partes pintadas y el total de partes disponibles, respondiendo que la fracción es "partes pintadas" sobre "total de partes en que se dividió el todo" sin considerar la unidad de referencia que, por ejemplo, en el caso de la pregunta 1.2 es el círculo, ver Figura 16. Pazos (2009) advierte que en general las fracciones mayores a la unidad son menos intuitivas para trabajar la relación parte-todo y por tanto, son utilizadas con menor frecuencia en las aulas. En el caso de la pregunta 1.2 al elegir la opción A se infiere que el estudiante está interpretando que para encontrar la fracción tiene que dividir los dos círculos en 4 partes iguales y contar cuántas partes quedan pintadas (5) del total de partes disponibles (8) tal como se procedería en representaciones que son menores a la unidad. En el caso de la pregunta 1.4 vemos que sucede algo similar pues los estudiantes eligen la opción 9/12 donde el numerador nos indica la cantidad de canicas pintadas de negro y el denominador la cantidad total de canicas, sin importar que la unidad era la colección formada por 6 canicas.

En este bloque vemos que predomina el concepto de fracción como conteo de partes, es decir la fracción es vista como partes pintadas sobre total de partes entre las que se ha dividido la unidad (Pazos, 2009). Este concepto funciona bien para las preguntas 1.1 y 1.3 donde la fracción que se trabaja es menor a la unidad, pero fracasa para el caso en donde la fracción a encontrar es mayor a la unidad.

8.1.1.2 Bloque 2

Este bloque de preguntas nos permite explorar los conocimientos que demuestran poseer los estudiantes encuestados en cuanto a la categoría *Definiciones, propiedades y sus fundamentos (D)* definida para el KoT. En particular, en esta categoría, recogemos evidencias sobre el indicador *(D2) Reconoce el vínculo cuantitativo, en contextos continuos, entre las partes y el todo*. En la Tabla 15 se muestra un resumen de las preguntas y la frecuencia con la cual se eligió cada una de las opciones de respuesta, visualizando en color verde la opción correcta para cada pregunta y una columna final que indica la cantidad de encuestados que no respondieron a la pregunta.

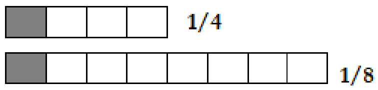
Tabla 15: *Cuestionario 1, bloque 2*

	A	B	C	D	En blanco	Porcentaje de acierto	Porcentaje de error	Porcentaje de omisión
Pregunta 2.1	3	7	59	3	0	81,9	18,1	0
Pregunta 2.2	65	4	0	2	1	90,3	8,3	1,4

Fuente: Elaboración propia usando *Software* JASP

Tanto la pregunta 2.1 como la 2.2 tienen como objetivo determinar si los estudiantes logran establecer relaciones cuantitativas entre la cantidad de superficie pintada y el todo (D2), ver Figura 18. A partir de los datos recogidos en la Tabla 15 podemos ver que en promedio un 86,1% de los encuestados contesta de forma correcta a las preguntas del bloque. Así mismo, vemos también que un promedio de 13,2 % de los estudiantes no contesta de forma correcta mientras que un 0,7% omite contestarlo.

Pregunta 2.1



Tomando en cuenta la representación dada.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(A) Como se pintaron dos cuadraditos de igual tamaño podemos decir que 1/4 es igual a 1/8
(B) Como únicamente se pintó un cuadradito, las dos fracciones son equivalentes
(C) Teniendo en cuenta la relación entre la parte pintada y el todo, 1/4 es mayor a 1/8
(D) Teniendo en cuenta la relación entre el todo y la parte pintada, 1/4 es menor a 1/8

Pregunta 2.2

Teniendo en cuenta que el rectángulo de borde negro es la unidad y sabiendo que una de las siguientes fracciones representa la zona pintada de gris, responde:

¿Cuál es dicha fracción?

(A) 1/4
(B) 1/3
(C) 1/2
(D) 1/1

Figura 18: *Preguntas 2.1 y 2.2*

La pregunta 2.1 es la que tiene un porcentaje de acierto menor siendo la opción incorrecta B la más elegida con un 9,7%. En dicha opción se establece que como las partes en ambas representaciones tienen el mismo tamaño las fracciones 1/4 y 1/8 son iguales. Al elegir esta opción los estudiantes no están teniendo en cuenta que se está trabajando con unidades distintas, ver Figura 18. Esta opción permite visualizar que 7 de los 72 encuestados presentan la dificultad reportada por Obando (2003) y Pazos (2009) en cuanto a no relacionar la parte con el todo.

Por otro lado, la pregunta 2.2 tiene un porcentaje de acierto de 90,3% siendo la opción incorrecta más elegida la B con un porcentaje de 5,6%. En dicha opción se establece que la fracción representada en la imagen es 1/3, ver Figura 18. Dicha fracción se corresponde con partes pintadas (1) y partes que faltan pintar (3).

A partir de lo anterior podemos ver que en general este bloque es contestado de forma incorrecta por pocos estudiantes. Por lo que podemos inferir que la gran mayoría de los estudiantes encuestados logran establecer el vínculo cuantitativo, en contextos continuos para fracciones menores a la unidad entre las partes y el todo (D2).

8.1.1.3 Bloque 3

Este bloque de preguntas nos permite explorar los conocimientos que demuestran poseer los estudiantes encuestados en cuanto a las categorías *Procedimientos (P)* y *Definiciones, propiedades y sus fundamentos (D)* definida para el KoT. En particular, en estas categorías, recogemos evidencias sobre los indicadores (P2) *Encuentra una cierta fracción de un conjunto, (D3) reconoce las partes y el todo en diferentes contextos y (D5) reconoce la propiedad que deben cumplir las partes y el todo.* En la Tabla 16 se muestra un resumen de las preguntas y la frecuencia con la cual se eligió cada una de las opciones de respuesta, visualizando en color verde la opción correcta para cada pregunta y una columna final que indica la cantidad de encuestados que no respondieron a la pregunta.

Tabla 16: *Cuestionario 1, bloque 3*

	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 3.1	1	18	45	8	0
Pregunta 3.2	4	1	2	60	5

Fuente: Elaboración propia usando *Software* JASP

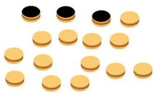
Es importante destacar que cada una de las preguntas del bloque responde a diferentes objetivos por lo que a continuación son analizadas de forma separada.

Podemos ver que un 62,5% responde de forma correcta a la pregunta 3.1 que tiene como objetivo determinar si los estudiantes logran encontrar una fracción menor que la unidad de un conjunto discreto (P2) así como también reconocer las partes y el todo de dicha unidad (D3), ver Figura 19. Cabe destacar que esta pregunta fue respondida por todos los encuestados y que la opción incorrecta más elegida fue la B con un 25% de las respuestas. Dicha opción recoge la dificultad de no considerar la unidad adecuada (16 alfajores) (Obando ,2003), en tal sentido se estaría considerando como unidad al conjunto formado por 4 alfajores y de estos se pintan ¾, es decir se interpreta cada alfajor como ¼. Para esta misma pregunta la opción incorrecta que sigue a la anterior en cuanto a la elección es la D, ya que es elegida por un 11,1% de los encuestados. En la elección de dicha opción se evidencia la dificultad reportada por Obando (2003) de dividir a un conjunto discreto en un cierto número de partes, pues en este caso se pintan 4 alfajores ya que el denominador de la fracción pedida es 4 por lo que no se está dividiendo al conjunto discreto en cuartos y además se está omitiendo al numerador de la fracción pedida.

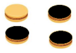
Pregunta 3.1

¿En cuál de las siguientes opciones se pintaron de negro 3/4 del total de los alfajores dados en la imagen?

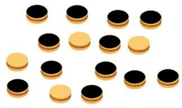
(A)



(B)



(C)



(D)

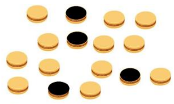


Figura 19: *Pregunta 3.1*

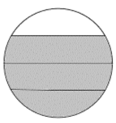
Por otro lado, la pregunta 3.2 que forma parte del bloque tiene como objetivo determinar si los estudiantes reconocen la propiedad partes congruentes en representaciones del tipo continuas (D5) , ver Figura 20. Dicha pregunta fue respondida correctamente por un 83,3%, de forma incorrecta por un 9,8% y no la responde un 6,9% de los estudiantes encuestados. Teniendo en cuenta el porcentaje de acierto podemos ver que en general los estudiantes reconocen la propiedad “partes congruentes” en una representación del tipo continua. En cuanto a las opciones incorrectas A y B donde se muestra a la unidad dividida en 4 partes no iguales podemos ver que son elegidas por un 7% de los encuestados, ver Figura 20. Es importante destacar que 6,9% de los estudiantes encuestados dejan en blanco a la pregunta por lo que podríamos decir que para este porcentaje de estudiantes ninguna de las representaciones gráficas dadas se corresponde con ¾.

Pregunta 3.2

¿Cuál de las siguientes opciones muestra una afirmación correcta?

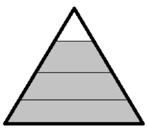
(A)

Se pintaron de gris los ¾ del círculo



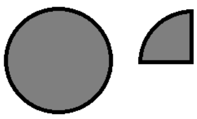
(B)

Se pintaron de gris los ¾ del triángulo de borde negro.



(C)

Se pintaron de gris los ¾ del círculo



(D)

Se pintaron de gris los ¾ del rectángulo

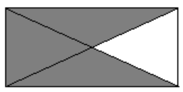


Figura 20: *Pregunta 3.2*

A partir del análisis descriptivo anterior y de los dos objetivos definidos en este bloque, podemos ver que en cuanto al primer objetivo los estudiantes encuestados evidencian dificultades al dividir un todo discreto para encontrar una cierta fracción de dicho conjunto. En cuanto al segundo objetivo se infiere que, en general, los estudiantes demuestran poseer conocimiento sobre la propiedad partes congruentes en representaciones del tipo continuas.

8.1.1.4 Bloque 4

Este bloque de preguntas nos permite explorar los conocimientos que demuestran poseer los estudiantes encuestados en cuanto a la categoría *Procedimientos (P)* definida para el KoT. En particular, en esta categoría, recogemos evidencias sobre el indicador *(P3) reconstruye la unidad a partir de alguna de sus partes en diferentes contextos*. En la Tabla 17 se muestra un resumen de las preguntas y la frecuencias con la cual se eligió cada una de las opciones de respuesta, visualizando en color verde la opción correcta para cada pregunta y una columna final que indica la cantidad de encuestados que no respondieron a la pregunta.

Tabla 17: *Cuestionario 1, bloque 4*

	A	B	C	D	En blanco	Porcentaje de acierto	Porcentaje de error	Porcentaje de omisión
Pregunta 4.1	5	9	54	3	1	75	23,6	1,4
Pregunta 4.2	3	23	18	24	4	33,3	61,1	5,6

Fuente: Elaboración propia usando *Software* JASP

Las preguntas del bloque tienen como objetivo determinar si los estudiantes logran reconstruir la unidad, discreta o continua, usando para ello alguna de sus partes (P3). Tomando en cuenta la Tabla 17 observamos, en los datos relevados, que en promedio un 54,2% de los encuestados logra reconstruir la unidad usando una de sus partes mientras que un 42,3% lo hace de forma incorrecta y un 3,5% no lo hace. En particular, la pregunta 4.2 donde la unidad es continua resultó más compleja que la 4.1 donde la unidad es discreta, ver Figura 21 y Figura 22. Se evidencia una alta presencia de la dificultad reportada por Pazos (2009) al reconstruir la unidad considerando alguna de sus partes en representaciones del tipo continuas.

Tal como se puede apreciar en la Figura 21, la pregunta 4.1 permite observar cuántos estudiantes logran reconstruir la unidad discreta a partir de una parte de ella (P3). En este sentido, vemos que un 75% de los estudiantes la reconstruyen de forma correcta, un 25% lo hace de forma incorrecta y un 1,4% no lo hace. En consecuencia, podríamos decir que más de la mitad de los estudiantes logran reconstruir la unidad a partir de una de sus partes cuando la unidad es discreta. Dentro de las opciones incorrectas podemos ver que la opción B es elegida por un 12,5% siendo la que acumula una mayor frecuencia. Esta opción recoge la dificultad reportada por Pazos (2009) de comenzar el trabajo con la unidad ya dada. En este sentido, el autor explica que, en general, las diferentes actividades demandan a los estudiantes trabajar desde la unidad para encontrar una cierta fracción por lo que, en este caso, para encontrar los 4/4 pedidos el estudiante considera que las doce bolitas son la unidad, las divide en cuartos encontrando que tres bolitas son ¼ y las agrega a las doce bolitas para completar la unidad, no interpretando que al realizar este procedimiento no se están obteniendo 4/4 y obviando el dato de que las doce bolitas son 3/4. La opción incorrecta A es elegida por un 6,9% de los encuestados y es la que sigue en frecuencia a la opción incorrecta B, en este caso, los estudiantes encuentran cuántas bolitas se corresponden con 1/3 pero no terminan de reconstruir la unidad discreta.

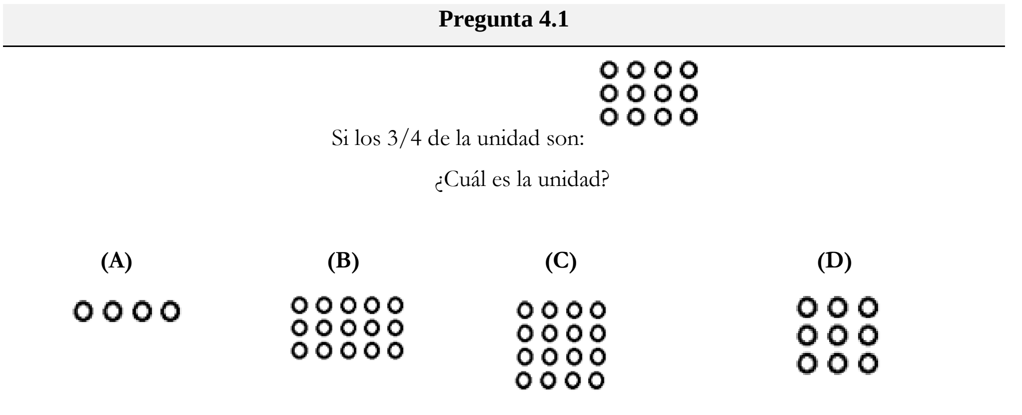


Figura 21: *Pregunta 4.1*

La pregunta 4.2 donde los estudiantes deben reconstruir la unidad continua a partir de una de sus partes (P3) (ver Figura 22) es contestada de forma correcta por un 33,3%, incorrecta por un 66,7% mientras que no la contesta un 5,6%. En particular, un 31,9% elige la opción B que evidencia la dificultad de dividir la parte dada en la pregunta (triángulo) entre la cantidad de partes que indica el denominador de la fracción 2/3 y, en consecuencia, responden que la representación gráfica que corresponde a 3/3 es igual en superficie a la representación gráfica que corresponde a 2/3 de la misma unidad. Por otro lado, un 25% de los estudiantes encuestados eligen como opción correcta para la pregunta 4.2 la C, donde se agrega 1/3 a la figura dada para completar la unidad. La elección de la opción B y C está relacionada con la dificultad reportada por Pazos (2009) que indica que la mayor cantidad de actividades que se proponen en el aula demandan trabajar desde la unidad ya dada. En este sentido, los estudiantes parten en tercios la figura inicial pues siempre es el denominador el que indica las particiones y como vemos en una opción le agregan ese tercio (opción C) y en la otra opción, simplemente dejan el dibujo de las particiones (opción B).

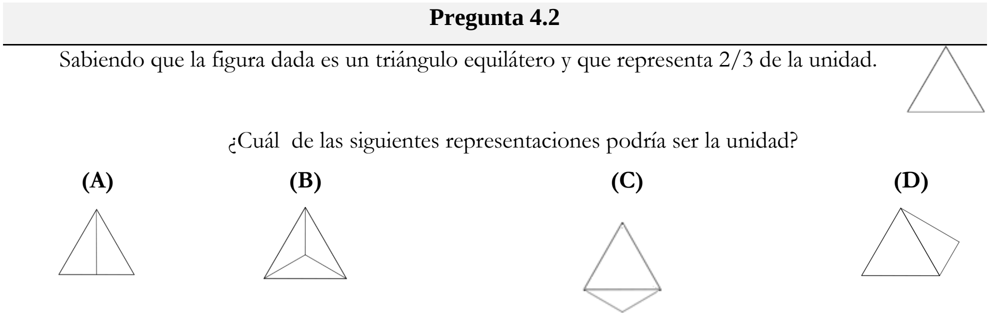


Figura 22: *Pregunta 4.2*

A partir del análisis descriptivo anterior podemos inferir que a los estudiantes les resulta más difícil reconstruir la unidad a partir de una de sus partes cuando el todo es continuo que cuando es discreto. Dentro de las dificultades que se presentan hay una fuerte presencia de la dificultad de considerar la imagen dada como la unidad, obviando el dato que se indica en la pregunta de que la representación gráfica inicial es una parte del todo (opción B en la pregunta 4.1 y opción B y C en la pregunta 4.2).

8.1.1.5 Bloque 5

Este bloque de preguntas nos permite explorar los conocimientos que demuestran poseer los estudiantes encuestados en cuanto a la categoría *Procedimientos (P)* definida para el KoT. En particular, en esta dimensión, recogemos evidencias sobre el indicador *(P4) reconstruye la unidad a partir de una fracción mayor que ella en diferentes contextos*. En la Tabla 18 se muestra un resumen de las preguntas y la frecuencia con la cual se eligió cada una de las opciones de respuesta, visualizando en color verde la opción correcta para cada pregunta y una columna final que indica la cantidad de encuestados que no respondieron a la pregunta.

Tabla 18: *Cuestionario 1, bloque 5*

	A	B	C	D	En blanco	Porcentaje de acierto	Porcentaje de error	Porcentaje de omisión
Pregunta 5.1	32	6	10	20	4	44,4	50	5,6
Pregunta 5.2	21	30	12	7	2	41,7	55,5	2,8

Fuente: Elaboración propia usando *Software* JASP

Las preguntas del bloque tienen como objetivo determinar si los estudiantes logran reconstruir la unidad (discreta o continua) usando para esto una fracción mayor que ella (P4). Tomando en cuenta los datos relevados en la taba anterior observamos que en promedio un 43%

de los encuestados logra reconstruir la unidad usando una fracción mayor que ella, un 52,8% lo hace de forma incorrecta y un 4,2% no lo hace. En las dos preguntas que componen al bloque un poco más de la mitad de los encuestados no la responde o la responde de forma incorrecta, por lo que se evidencian dificultades al reconstruir la unidad a partir de una fracción mayor que ella, tanto si la unidad es continua como si es discreta (Pazos, 2009).

En la pregunta 5.1, donde se partía de un conjunto discreto para reconstruir la unidad (P4) (ver Figura 23) un 44,4% la contesta de forma correcta, un 50% lo contesta de forma incorrecta y un 5,6% no lo contesta. La opción incorrecta D es elegida por un 27,8% de los estudiantes encuestados. Tal como podemos ver en la Figura 23 la opción D es la que se corresponde con 1/5 del total de bolitas dadas. Se infiere que los estudiantes eligen esta opción al presentar dificultades para dividir en subconjuntos a la unidad discreta (Obando, 2003), interpretando que cada pelotita se corresponde con ½ y por lo tanto, la unidad serían dos bolitas. La opción incorrecta C es elegida por un 13,9% de los encuestados. En esta opción se muestra como respuesta correcta la cantidad de bolitas que se corresponden con 5/2 de las dadas en la imagen, en este caso, no se identifica que si 10 bolitas se corresponden con 5/2 la unidad 2/2 debe corresponderse con una cantidad menor de bolitas, no mayor como es el caso de la opción C. La opción B es elegida por 8,3% de los estudiantes y se corresponde con la mitad de las pelotitas dadas en la pregunta. Tanto la opción B como la C dejan en evidencia la dificultad reportada por Pazos (2009) de trabajar con la unidad dada, pues se desecha el dato que se brinda en la pregunta de que 10 bolitas son 5/2. En este sentido, directamente se divide a las 10 bolitas en medios (denominador) y en un caso se contesta con la mitad y en el otro se calculan los 5/2 de esta cantidad (ver Figura 23).

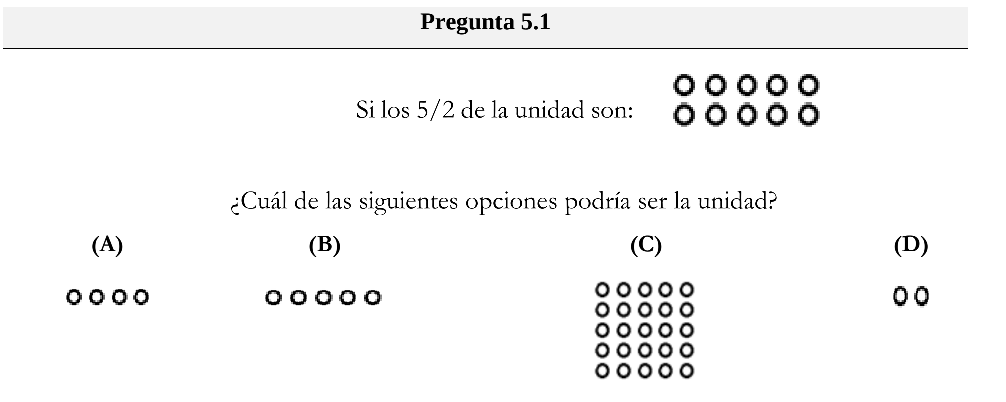


Figura 23: *Pregunta 5.1*

Por otro lado, en la pregunta 5.2 donde se partía de un conjunto continuo para reconstruir la unidad (P4) (ver Figura 24) un 41,7% contesta de forma correcta, un 55,5% contesta de forma incorrecta y un 2,8% no contesta. Dentro de las opciones incorrectas, la A es elegida por un 29,2% de los encuestados, representando la opción incorrecta con mayor frecuencia. Tal como podemos ver en la Figura 24 la opción A es la que se corresponde con 3/2 del triángulo dado en la pregunta, en este caso, los estudiantes están considerando que dicho triángulo es la unidad. Al elegir esta opción los estudiantes están respondiendo con una fracción mayor a la unidad y a 3/2. La opción C es elegida por un 16,7% de los encuestados. En la opción C para encontrar la unidad se divide al triángulo en tercios, pero luego, en lugar de restar un tercio, se agrega dicho tercio obteniendo como respuesta correcta 2 unidades en lugar de 1. Por otra parte, la opción D es elegida por un 9,7% de los estudiantes. En dicha opción se muestra al triángulo dado en la pregunta partido en medios y se considera que el triángulo completo se corresponde con la unidad. Las opciones incorrectas A y D permiten inferir que los estudiantes, en general, trabajan desde la unidad dada (Pazos, 2009) pues para encontrar los 2/2, en ambos casos, se divide al triángulo de la imagen en medios y se intenta buscar la unidad pedida, cuando en realidad al partir de 3/2 se debería dividir entre 3 partes iguales y considerar 2 para encontrar a la unidad.

Pregunta 5.2

Sabiendo que la figura dada es un triángulo equilátero y que representa 3/2 de la unidad.

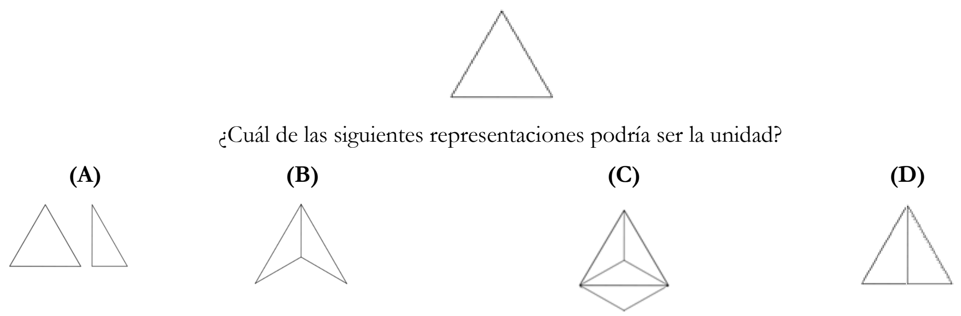


Figura 24: *Pregunta 5.2*

A partir del análisis descriptivo anterior podemos inferir que el procedimiento de reconstruir la unidad a partir de una parte mayor que ella resulta complejo a los estudiantes, tanto si consideramos contextos continuos o discretos, pues las dos preguntas que componen al bloque son contestadas de forma correcta por menos de la mitad de los estudiantes. Al momento de reconstruir la unidad, se reconoce una alta presencia de la dificultad de obviar el dato que indica que las figuras dadas son partes del todo, y se aplica el procedimiento para encontrar la unidad tal como si se estuviese dando la unidad (Pazos, 2009) (opción B y C en la pregunta 5.1 y opción A y D en la pregunta 5.2).

8.1.1.6 Bloque 6

Este bloque de preguntas nos permite explorar los conocimientos que demuestran poseer los estudiantes encuestados en cuanto a la categoría *Procedimientos (P)* definida para el KoT. En particular, en esta categoría, recogemos evidencias sobre el indicador *(P5) encontrar una fracción a partir de otra fracción de la misma unidad en diferentes contextos*. En la Tabla 19 se muestra un resumen de las preguntas y la frecuencia con la cual se eligió cada una de las opciones de respuesta, visualizando en color verde la opción correcta para cada pregunta y una columna final que indica la cantidad de encuestados que no respondieron a la pregunta.

Tabla 19: *Cuestionario 1, bloque 6*

	A	B	C	D	En blanco	Porcentaje de acierto	Porcentaje de error	Porcentaje de omisión
Pregunta 6.1	5	22	11	31	3	43,1	52,7	4,2
Pregunta 6.2	0	51	10	8	3	70,8	25	4,2

Fuente: Elaboración propia usando *Software* JASP

Las preguntas del bloque tienen como objetivo determinar si los estudiantes logran encontrar una fracción a partir de otra fracción de la misma unidad que es dada gráficamente, en contexto continuo o discreto (P5). Tomando en cuenta los datos de la tabla anterior, observamos que en promedio un 57% de los encuestados logra encontrar una fracción de cierta unidad a partir de otra fracción de ella, un 38,8% lo hace de forma incorrecta y un 4,2% no lo hace. En la pregunta 6.1, donde la fracción es dada en un contexto discreto, un 43,1% contestan de forma correcta mientras que en la 6.2, donde la fracción es dada en un contexto continuo, lo hacen un 70,8%.

Podemos ver que la pregunta 6.1 pedía a los estudiantes encontrar 2/3 a partir de ¾ de una unidad discreta (ver Figura 25). A partir de los datos relevados se pude decir que un 43,1% de los encuestados logra encontrar 2/3 a partir de ¾ de la unidad, 52,7% encuentra la respuesta con error y 4,2% no logra encontrar la fracción pedida. Las opciones incorrectas más elegidas en esta pregunta fueron la B y la C. La opción B muestra que un 30,6% de los encuestados encuentran 2/3 de las nueve bolitas dadas en la pregunta, considerando a éstas como la unidad y perdiendo de vista que dicha cantidad se corresponde con ¾ (ver Figura 25). Por otro lado, la opción C nos permite decir que 15,3% de los encuestados calculan la unidad de la cual se parte, en lugar de los 2/3 como se pedía. La opción A es elegida por un 6,9% y acarrea la dificultad de considerar un subconjunto de un conjunto discreto no reconociendo a la colección como la unidad (Obando,2003), en este sentido, cada una de las pelotitas es vista como una parte del todo, por tanto, 2/3 se corresponden con dos bolitas.

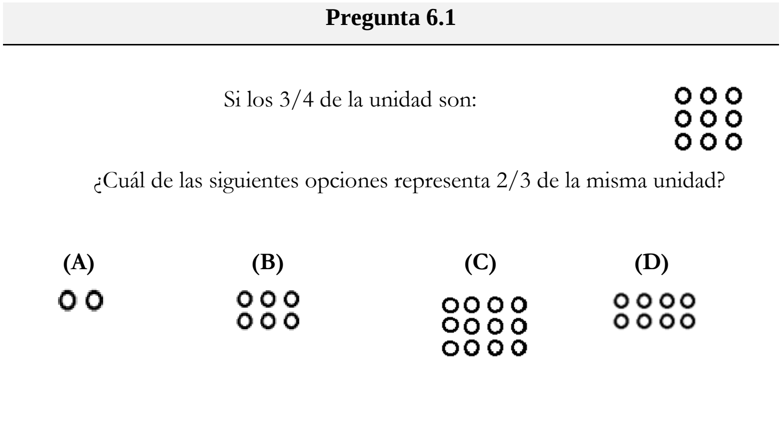


Figura 25*: Pregunta 6.1*

Por otra parte, la pregunta 6.2 pedía a los estudiantes encontrar 6/3 a partir de 4/3 de una unidad continua, ver Figura 26. Como puede verse en los datos relevados un 70,8% contesta de forma acertada a la pregunta, un 25% contesta de forma incorrecta, mientras que un 4,2% no contesta. Las opciones incorrectas más elegidas en esta pregunta fueron la C y la D, mientras que la A no es elegida por ningún estudiante. La opción C muestra que un 13,9% de los encuestados identifican como unidad a todo el círculo, por lo que 6/3 de la unidad lo asocian con dos círculos, no atendiendo que el círculo dado inicialmente representa 4/3 de la unidad (ver Figura 26). Por otro lado, la opción D nos permite decir que 11,1% de los encuestados también consideran como unidad al círculo, pero en este caso, lo dividen en tercios y agregan 2/3 más pues usan el dato, de forma incorrecta, de que el círculo representa 4/3. Las opciones C y D permiten ver la dificultad reportada por Pazos (2009) de que en general, los estudiantes parten de la unidad para encontrar una cierta fracción. En este sentido, vemos que en el caso de la opción C se considera a un círculo como la unidad y a partir de ella, se encuentran 6/3, mientras que en el caso de la opción D, también se considera al círculo como unidad y se lo divide en 3/3, aunque en este último caso se utiliza el dato 4/3 de forma incorrecta.

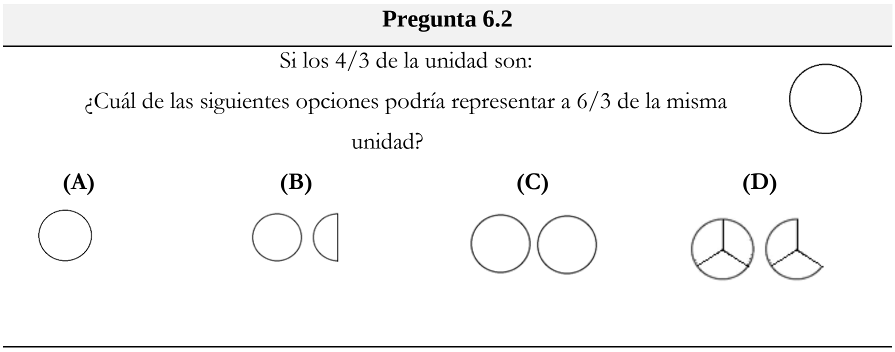


Figura 26: *Pregunta 6.2*

A partir de lo anterior podemos inferir que los estudiantes presentan mayores dificultades al encontrar una fracción a partir de otra fracción cuando la unidad de referencia es discreta que cuando es continua (P5). Además, en este tipo de pregunta es frecuente que para obtener una fracción de otra fracción de la unidad se cometa el error de considerar como unidad de referencia el conjunto dado en la pregunta, aunque se les indique que éste es una fracción de la unidad (Pazos, 2009). Esto último lo vemos en el caso de la pregunta 6.1 en la opción B y en el caso de la pregunta 6.2. en las opciones C y D.

8.1.1.7 Bloque 7

Este bloque de preguntas nos permite explorar los conocimientos que demuestran poseer los estudiantes encuestados en cuanto a la categoría *Definiciones, propiedades y sus fundamentos (D)* definida para el KoT. En particular, en esta categoría, recogemos evidencias sobre el indicador *(D4) reconocer a un cierto segmento como unidad*. En la Tabla 20 se muestra un resumen de las preguntas y la frecuencia con la cual se eligió cada una de las opciones de respuesta, visualizando en color verde la opción correcta para cada pregunta y una columna final que indica la cantidad de encuestados que no respondieron a la pregunta.

Tabla 20: *Cuestionario 1, bloque 7*

	A	B	C	D	En blanco	Porcentaje de acierto	Porcentaje de error	Porcentaje de omisión
Pregunta 7.1	9,7	5,6	75	5,6	4,2	75	20,8	4,2
Pregunta 7.2	8,3	84,7	2,8	1,4	2.8	84,7	12,5	2,8

Fuente: Elaboración propia usando *Software* JASP

Las preguntas del bloque tienen como objetivo determinar si los estudiantes logran reconocer a un segmento como unidad y en particular, usarlo para encontrar longitudes de otros segmentos (D4). Tomando en cuenta los datos de la tabla anterior observamos que en promedio un 79,9% de los encuestados logran reconocer al segmento dado como unidad y lo usan de forma correcta para encontrar las longitudes de los segmentos pedidos, un 16,6% lo hace de forma incorrecta y un 3,5% no lo hace.

La pregunta 7.1 pedía a los estudiantes encontrar una longitud mayor que la unidad de un cierto segmento a partir de otro segmento que es considerado como unidad (D4) (ver Figura 27). En este sentido, podemos ver que un 75% de los estudiantes contestan de forma correcta encontrando la longitud pedida, un 20,8% lo hace con error y un 4,2 no contesta. La opción incorrecta más elegida es la A con un porcentaje de 9,7% y dicha opción se vincula con la dificultad de no reconocer a la longitud del segmento AB como numerador en la fracción que expresa la longitud pedida, sino que se reconoce la longitud del segmento BC como el numerador de la fracción, siendo éste la diferencia entre la longitud del segmento AB y AC. La opción incorrecta B es elegida por un 5,6%, en este caso, se establece la relación longitud del segmento unidad sobre longitud del segmento BC, siendo este último, la diferencia de la longitud entre el segmento AB y AC. De manera similar la opción D es elegida por un 5,6% de los encuestados, en este caso, se establece la relación longitud del segmento BC sobre longitud del segmento AB en lugar de AC.

Pregunta 7.1

Sabiendo que el cuadriculado que se presenta está formado por cuadrados iguales, responde:

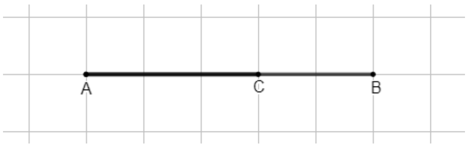
¿Cuánto mide el segmento AB si consideramos como unidad la longitud del segmento AC?

(A)	**(B)**	**(C)**	**(D)**
2/5	5/2	7/5	2/7

Figura 27: *Pregunta 7.1*

Por otra parte, la pregunta 7.2 pedía a los estudiantes encontrar la longitud de un segmento menor que la unidad a partir de otro que es considerado como la unidad de referencia (ver Figura 28). A partir de los datos recogidos podemos ver que un 84,7% contesta de forma correcta a la pregunta, un 12,5% contesta de forma incorrecta mientras que un 2,8% no contesta. La opción incorrecta más elegida es la A y es seleccionada por un 8,3% de los encuestados. En esta opción se pueden ver dificultades para reconocer el segmento unidad, pues la longitud considerada como tal es la longitud diferencia entre AB y AC, usando como segmento unidad al BC. La opción incorrecta C es elegida por un 2,8% de los encuestados y establece que el numerador de la fracción pedida es 8 por estar las longitudes AC y AB superpuestas, en esta opción, la unidad de referencia es reconocida de forma correcta. Finalmente, la opción incorrecta D es elegida por un 1,4% y establece la relación longitud del segmento AC sobre longitud del segmento BC, siendo éste la diferencia entre la longitud del segmento unidad y la parte a considerar.

Pregunta 7.2



Sabiendo que el cuadriculado que se presenta está formado por cuadrados iguales, responde:

¿Cuánto mide el segmento AC si consideramos como unidad la longitud del segmento AB?

(A)	**(B)**	**(C)**	**(D)**
3/2	3/5	8/5	2/3

Figura 28*: Pregunta 7.2*

Tanto en la pregunta 7.1 como en la 7.2 la gran mayoría de los encuestados identifica de forma correcta cuál de las longitudes involucradas se corresponde con el numerador de la fracción y cuál con el denominador. Además, podemos destacar que los estudiantes no presentan mayores dificultades en el caso de la pregunta 7.1. En dicha pregunta se trabaja con una fracción que es mayor que la unidad, pero en el contexto continuo longitud. Dentro de las opciones incorrectas elegidas podemos inferir que algunos estudiantes, al intentar encontrar las longitudes pedidas, reconocen como segmento unidad o como parte, la diferencia de longitudes entre los segmentos a relacionar.

8.1.1.8 Bloque 8

Este bloque de preguntas nos permite explorar los conocimientos que demuestran poseer los estudiantes encuestados en cuanto a la categoría *Definiciones, propiedades y sus fundamentos (D)* definida para la dimensión KoT. En particular, en esta dimensión, recogemos evidencias sobre los indicadores *(D6) reconoce representaciones equivalentes cuando la unidad es la misma pero las divisiones dadas son distintas y (D7) reconoce representaciones equivalentes cuando las unidades de referencia son distintas.* En la Tabla 21 se muestra un resumen de las preguntas y la frecuencia con la cual se eligió cada una de las opciones de respuesta, visualizando en color verde la opción correcta para cada pregunta y una columna final que indica la cantidad de encuestados que no respondieron a la pregunta.

Tabla 21: *Cuestionario 1, bloque 8*

	A	B	C	D	En blanco	Porcentaje de acierto	Porcentaje de error	Porcentaje de omisión
Pregunta 8.1	19	19	11	19	4	26,4	68	5,6
Pregunta 8.2	20	16	14	16	6	27,8	63,9	8,3

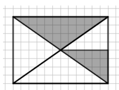
Fuente: Elaboración propia usando *Software* JASP

Las preguntas del bloque tienen como objetivo determinar si los estudiantes reconocen representaciones equivalentes cuando la unidad de referencia es la misma pero las divisiones dadas no son congruentes geométricamente, y también, cuando las unidades de referencia son distintas pero la relación parte-todo es la misma (D6 y D7). Tomando en cuenta los datos de la tabla anterior, observamos que en promedio un 27,1% de los encuestados logra reconocer representaciones equivalentes cuando se usan diferentes unidades de referencia o divisiones congruentes en superficie de la misma unidad, un 66% lo hace de forma incorrecta y un 6,9 no lo hace. Además, cabe destacar que en ambas preguntas las respuestas de los estudiantes se distribuyen de forma uniforme entre las opciones correctas e incorrectas. A continuación, analizaremos cada una de las respuestas de forma pormenorizada.

Como podemos ver en la Figura 29, la pregunta 8.1 muestra una posible representación de 3/8 teniendo como unidad de referencia el rectángulo. En dicha pregunta se solicita a los estudiantes que señalen otra representación en el mismo rectángulo que sea equivalente a la dada (D6). En relación a dicha pregunta podemos ver que un 26,4% de los estudiantes logra contestarla de forma correcta, un 68% la contesta de forma incorrecta y un 5,6% omite contestarla.

Pregunta 8.1

Sabiendo que el rectángulo es la unidad y que el cuadriculado que se presenta está formado por cuadrados iguales. Si se considera la zona pintada de gris en relación a dicha unidad:



¿Cuál de las siguientes representaciones es equivalente a la anterior?

(A) **(B)** **(C)** **(D)**

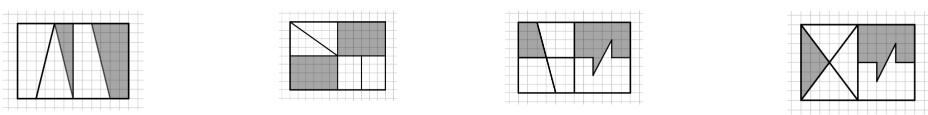


Figura 29: *Pregunta 8.1*

Siguiendo con la pregunta 8.1 podemos ver que un 26,4% de los encuestados eligen la opción incorrecta A. En este caso, se infiere que los estudiantes que eligen esta opción presentan dificultades en reconocer que las partes pintadas en ambas representaciones deben ser iguales en área de superficie para que las fracciones sean equivalentes (Pazos, 2009). La elección de esta opción se debe a que los estudiantes reconocen que el rectángulo dado en la pregunta está dividido en 5 partes, de las cuales 2 están pintadas al igual que en la opción A, aunque las partes no sean congruentes en superficie (ver Figura 29).

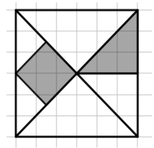
Por otro lado, un 26,4% eligen como respuesta correcta para la pregunta 8.1 la opción B, donde se están representando 2/4 en lugar de 3/8. En este caso, concluimos que los estudiantes eligen esta opción pues identifican que en el rectángulo dado en la pregunta se pintaron un cuarto del total y un cuarto de una parte, por tanto, se tienen equivocadamente 2/4, y al observar que en la opción B están representados 2/4 las identifican como equivalente (ver Figura 29).

La opción C de la pregunta 8.1 es elegida por un 15,3% de los encuestados, en este caso los estudiantes observan que en el rectángulo inicial se pintó un cuarto y una parte más pequeña que un cuarto, reconociendo que esto es equivalente a la figura dada en la pregunta. No identifican que en la figura de la pregunta la parte más pequeña es ¼ de ¼ por lo que representa a 1/8, y en la opción C la mitad del rectángulo es dividido en 4 partes que no son equitativas, por lo que no son octavos (ver Figura 29).

Por otra parte, podemos ver en la Figura 30 que la pregunta 8.2 muestra una posible representación de 1/4 teniendo como unidad de referencia al cuadrado. En dicha pregunta se solicita a los estudiantes que señalen otra representación equivalente donde las opciones que se dan no muestran, necesariamente, al cuadrado como unidad de referencia (D7). Esta pregunta es contestada de forma correcta por un 27,8% de los encuestados, de forma incorrecta por un 63,9% y se omite por un 8,3%.

Pregunta 8.2

Sabiendo que el cuadrado es la unidad y que el cuadriculado que se presenta está formado por cuadrados iguales. Si se considera la zona pintada de gris en relación a dicha unidad:



¿Cuál de las siguientes representaciones es equivalente a la anterior?

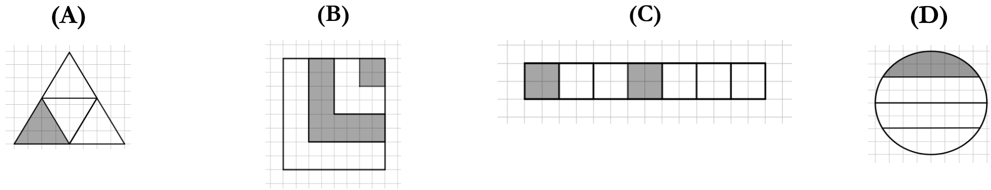


Figura 30*: Pregunta 8.2*

Dentro de las opciones incorrectas para la pregunta 8.2, la opción B es elegida por un 22,2% de los estudiantes (ver Figura 30). Esta opción es la única dentro de las cuatro opciones donde la unidad de referencia es el cuadrado, por lo que inferimos que la elección de esta opción se asocia con que el concepto de equivalencia se está usando como sinónimo de "igualdad geométrica en la unidad" que se considera.

La opción incorrecta C de la pregunta 8.2 es elegida por un 19,4% de los encuestados (ver Figura 30). En esta opción se muestra que de siete divisiones se pintaron dos, al igual que ocurre en la imagen de la pregunta que se tienen siete partes que no son iguales y dos pintadas. En tal caso, inferimos que los estudiantes eligen esta opción por establecer la relación número de partes pintas sobre número de partes totales en que se divide la unidad, sin importar si estas partes son congruentes.

Finalmente, la opción D de la pregunta 8.2 es elegida por un 22,2% de los encuestados (ver Figura 30). En esta opción se muestra la unidad círculo dividida en cuatro partes que no son iguales, en este caso, inferimos que los estudiantes eligen esta opción pues identifican que en la figura que se da en la pregunta se representa a ¼ por lo que eligen la opción que tiene pintadas una parte de cuatro, sin importar si estas partes son congruentes, descartando a la opción correcta, pues el círculo es una unidad que resulta familiar en la relación parte-todo.

A partir de las respuestas dadas a la pregunta 8.1 se infiere que los estudiantes encuestados presentan dificultades al reconocer representaciones equivalentes cuando la unidad de referencia es la misma pero las partes son diferentes en su forma geométrica (Pazos, 2009; Fandiño Pinilla, 2007 y Obando, 2003). Además, se evidencian, para el caso de la pregunta 8.2, dificultades al reconocer representaciones que muestran la misma relación superficie pintada-superficie total cuando la relación está dada en unidades geométricamente distintas. Es importante destacar que en estas dos preguntas se puede observar la dificultad reportada por Obando (2003) en cuanto a que la equivalencia de fracciones está ligada a la congruencia de las partes en que se ha dividido la unidad. A esta dificultad podemos agregar que algunos estudiantes identifican el término equivalencia con igualdad de forma de la unidad o también con la relación número de partes pintadas sobre número de partes totales en que se ha dividido la unidad, sin importar si estas partes son congruentes (Pazos, 2009).

8.1.1.9 Bloque 9

Este bloque de preguntas nos permite explorar los conocimientos que demuestran poseer los estudiantes encuestados en cuanto a la categoría *Definiciones, propiedades y sus fundamentos (D)* definida para la dimensión KoT. En particular, en esta dimensión, recogemos evidencias sobre el indicador *(D8) reconocer distintas representaciones gráficas para una misma fracción.* En Tabla 22 se muestra un resumen de las frecuencia con la cual se eligió cada una de las opciones de respuesta, visualizando en color verde la opción correcta (D) y una columna final que indica la cantidad de encuestados que no respondieron a la pregunta.

Tabla 22: *Cuestionario 1, bloque 9*

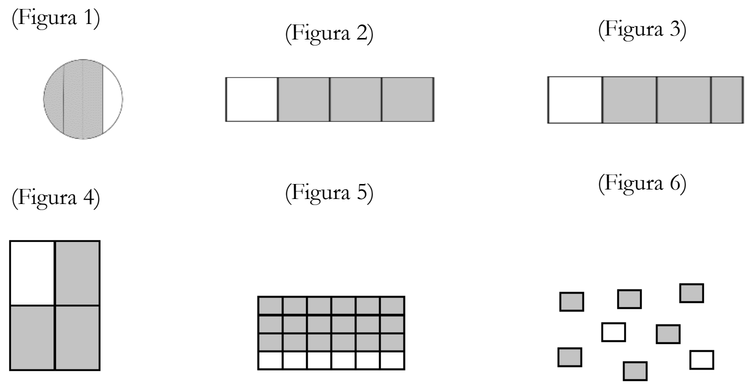
	A	**B**	**C**	**D**	**En blanco**	**Porcentaje de acierto**	**Porcentaje de error**	**Porcentaje de omisión**
Pregunta 9.1	7	18	4	41	2	56,9	40,3	2,8

Fuente: Elaboración propia usando *Software* JASP

Tal como podemos ver en la Figura 31, la pregunta 9.1 solicitaba seleccionar de un conjunto de representaciones todas aquellas que representaran a la fracción ¾ (D8). A partir de los datos relevados en la tabla anterior podemos ver que un 56,9% de los estudiantes logran reconocer todas las representaciones diferentes de la fracción 3/4, un 40,3% no reconoce algún tipo de representación o incluye alguna que no se corresponde con ¾, mientras que un 2,8% omite responder la pregunta.

Pregunta 9.1

Teniendo en cuenta la parte sombreada de gris:



¿En cuál de las siguientes opciones se nombran **TODAS** las figuras en donde la zona pintada de gris representa ¾ del conjunto?

(A)	**(B)**	**(C)**	**(D)**
Figuras 2 y 4	Figuras 2, 4 y 5	Figuras 1, 2, 3 y 4	Figuras 2, 4, 5 y 6

Figura 31: *Pregunta 9.1*

Dentro de las opciones incorrectas vemos que la más elegida es la opción B con un 25%. Esta opción indica que las únicas figuras que se corresponden con ¾ son la 2, 4 y 5, que como podemos ver son aquellas donde las divisiones de la unidad son idénticas. Los estudiantes que seleccionaron esta opción reconocen al ¾ en figuras donde la unidad está partida en 4 partes congruentes geométricamente y están pintadas 3 (figura 2 y 4) y también reconocen representaciones equivalentes a 3/4 cuando la magnitud es continua (figura 5).

Por otro lado, la opción A que establece que las únicas figuras que representan ¾ son la 2 y la 4 es elegida por un 9,7% de los encuestados. Los estudiantes que eligen esta opción reconocen como representante de ¾ únicamente aquellas representaciones donde se pintan 3 de 4 partes congruentes geométricamente. Se infiere la presencia de la dificultad reportada por Obando (2003) que estable que los estudiantes al intentar reconocer una cierta fracción en una representación dada necesitan que las partes en que se divide la unidad sean iguales geométricamente.

Mientras que la opción C, donde se indica que la representación de ¾ estaba dada en las figuras 1, 2, 3 y 4, es elegida por un 5,6%. Esto nos permite afirmar que en representaciones de fracciones menores a la unidad son pocos los estudiantes que reconocen como representante de ¾ aquellas figuras donde la unidad esta partida en 4 partes iguales pero que no son necesariamente iguales en superficie.

A partir de las respuestas dadas a este bloque podemos inferir que poco más de la mitad de los encuestados logran reconocer distintas representaciones gráficas para una misma fracción donde la unidad de referencia es distinta o la representación dada es equivalente a la fracción pedida. En las respuestas de los estudiantes predomina el concepto de "igualdad geométrica" de las partes al encontrar una cierta fracción. Así mismo, podemos concluir que varios estudiantes eligen como representantes de ¾ aquellas representaciones que no son discretas, dejando a la figura 6 fuera. Esto último evidencia dificultades con el tratamiento de magnitudes discretas y la división de una colección en subconjuntos (Obando, 2003; León-Mantero et al., 2016).

8.1.2 Preguntas donde los estudiantes suelen fallar: Cuestionario 1

En esta sección se realiza un resumen a partir de los hallazgos reportados anteriormente de las preguntas que tienen un porcentaje de acierto menor a 50% y de las dificultades que se visualizan a partir de ellas.

En la Tabla 23 podemos ver un resumen de los porcentajes de acierto, error u omisión reportado para las preguntas que son contestadas de forma correcta por menos de la mitad de los estudiantes encuestados y por ende presentan un porcentaje de error u omisión mayor al 50%.

Tabla 23: *Cuestionario 1, preguntas donde se suele fallar*

Preguntas	Porcentaje de acierto	Porcentaje de error	Porcentaje de omisión
P1.2	38,9	58,3	2,8
P1.4	20,8	79,2	0
P4.2	33,3	61,1	5,6
P5.1	44,4	50	5,6
P5.2	41,7	55,5	2,8
P6.1	43,1	52,7	4,2
P8.1	26,4	68	5,6
P8.2	27,8	63,9	8,3

Fuente: Elaboración propia usando *Software* JASP

A partir de las preguntas 1.2 y 1.4 inferimos que los estudiantes encuestados presentan una notoria dificultad en el reconocimiento del "todo" (D1) cuando las fracciones involucradas son mayores a la unidad (Pazos, 2009) pese a que dicha unidad sea explicitada. Tal como indica

Pazos (2009) podemos ver que dichas fracciones resultan menos intuitivas para trabajar la relación parte-todo y por tanto, al momento de resolver problemas que las involucran, los estudiantes cometen errores con mayor frecuencia. Podemos decir entonces, que los estudiantes encuestados suelen fallar al vincular representaciones gráficas de fracciones mayores a la unidad en contextos discretos o continuos (P1).

En las respuestas dadas a la pregunta 4.2 se pueden reconocer notorias dificultades al aplicar procedimientos que impliquen reconstruir la unidad en representaciones del tipo continuas, a partir de una fracción menor que ella (P3).

Por otro lado, las respuestas dadas a las preguntas 5.1 y 6.1 evidencian dificultades en el tratamiento de colecciones discretas. En particular, en la pregunta 5.1 los estudiantes muestran dificultades al aplicar procedimientos que les permitan reconstruir la unidad a partir de una fracción mayor que ella en representaciones discretas (P4). Del mismo modo, las respuestas a la pregunta 6.1 evidencian problemas al aplicar procedimientos para encontrar una fracción a partir de otra fracción de la misma unidad (P5).

La pregunta 8.1 nos permite concluir que los estudiantes encuestados presentan dificultades al reconocer representaciones equivalentes cuando la unidad de referencia es la misma pero las partes son diferentes en su forma geométrica (Pazos, 2009; Fandiño Pinilla, 2007 y Obando, 2003) (D6). Asimismo, las respuestas a la pregunta 8.2 evidencian dificultades al reconocer representaciones que muestran la misma relación superficie pintada-superficie total cuando la relación está dada en unidades geométricamente distintas (D7).

A partir de las preguntas 8.1 y 8.2 se puede observar la dificultad reportada por Obando (2003) en cuanto a que la equivalencia de fracciones está ligada a la congruencia geométrica de las partes en que se ha dividido la unidad. A esta dificultad se le agrega, a partir de las respuestas dadas, que algunos estudiantes identifican el término equivalencia con igualdad de forma de la unidad o también, con la relación número de partes pintadas sobre número de partes totales en que se ha dividido la unidad sin importar si estas partes son congruentes (Pazos, 2009).

8.2 Categorías de Análisis de la Entrevista 2

La entrevista 2 permitió recoger evidencias sobre las categorías *Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas* (F), *Teoría del aprendizaje matemático* (T) y *Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático* (I) definida para el subdominio

Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). En particular, cada parte de la entrevista permitió evidenciar la presencia de los diferentes indicadores que definen a cada una de las categorías. Dichos indicadores fueron explicitados en secciones anteriores.

Además de la información recogida para las anteriores categorías, se lograron identificar algunos de los conceptos matemáticos que fueron considerados para el cuestionario 1. En particular, se recogieron evidencias sobre los indicadores (D1) *Reconoce la unidad con que se está trabajando en diferentes contextos*, (D2) *Reconoce el vínculo cuantitativo, en contextos continuos, entre las partes y el todo*, (D3) *Reconoce las partes y el todo en diferentes contextos*, (D5) *Reconoce la propiedad que deben cumplir las partes y el todo* y (D7) *Reconoce representaciones equivalentes cuando las unidades de referencia son distintas*. Estos indicadores fueron definidos anteriormente para la categoría *Definiciones, propiedades y sus fundamentos* (D) del subdominio KoT.

8.3 Análisis de las Respuestas Obtenidas en la Entrevista 2

En este capítulo se presentan los resultados obtenido luego de realizar las entrevistas a los estudiantes seleccionados. La selección de la muestra, como ya se indicó en capítulos anteriores, se realizó teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el cuestionario 1.

Para realizar el análisis de los datos recogidos, se tienen en cuenta los diferentes momentos que se definieron para las entrevistas pues cada uno de estos momentos permite recoger información sobre diferentes indicadores del subdominio Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). Este subdominio forma parte del marco teórico adoptado para este trabajo denominado MTSK. Dicho marco, junto con las evidencias reportadas en este apartado, nos permitirá en el siguiente capítulo responder a las preguntas de investigación y cumplir con los objetivos propuestos en capítulos anteriores.

A continuación, analizaremos conjuntamente las respuestas de los 7 entrevistados dando cuenta de las evidencias que posteriormente permitirán obtener información sobre los objetivos específicos de este trabajo. Es importante aclarar que para mantener el anonimato de los entrevistados se les denominará Entrevistado 1 (E1), Entrevistado 2 (E2), Entrevistado 3 (E3), Entrevistado 4 (E4), Entrevistado 5 (E5), Entrevistado 6 (E6) y Entrevistado 7 (E7).

8.3.1 *Conocimiento de los futuros maestros sobre estrategias aplicadas por estudiantes escolares al usar el concepto de fracción*

La primera parte de la entrevista nos permitió explorar los conocimientos que demuestran poseer los estudiantes entrevistados en cuanto a la categoría *Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático (I)* definida para el subdominio KFLM. En particular, en este subdominio, recogemos evidencias sobre el indicador (I1) *Conoce procesos y estrategias que aplican los estudiantes al momento de enfrentarse a una actividad matemática*.

Para comenzar la entrevista se le muestra a los futuros maestros una actividad matemática que es propuesta a estudiantes escolares (ver Figura 32) y en base a dicha actividad se les consulta a los entrevistados: ¿Cómo podría responder esta tarea un estudiante escolar?. Y según sus respuestas se les pide que justifiquen sus ideas.

La pregunta tiene como objetivo principal que los entrevistados anticipen respuestas de estudiantes escolares. Esto nos permitió ver qué conocimientos tenían los futuros maestros sobre las estrategias que aplican los escolares al enfrentarse a la actividad de asociar la fracción ¾ con diferentes representaciones gráficas.

Para analizar las respuestas que surgen en las entrevistas definimos, a partir de las dificultades comunes y de los errores que pueden cometer los estudiantes, diferentes estrategias que podrían aplicar dichos estudiantes escolares para resolver la actividad propuesta. En este sentido, encontramos que existen seis estrategias posibles, a saber: (Estrategia 1) Observar en qué figuras hay cuatro particiones de las cuales tres están pintadas, (Estrategia 2) Observar en qué figuras hay cuatro particiones iguales de las cuales tres están pintadas, (Estrategia 3) Agrupar a un conjunto de objetos y considerarlos como una parte, (Estrategia 4) Observar a una parte dividida en varias partes y considerarla como una sola, (Estrategia 5) Elegir las figuras por familiaridad en el contexto escolar, (Estrategia 6) Descartar opciones por no ser familiares al contexto escolar.

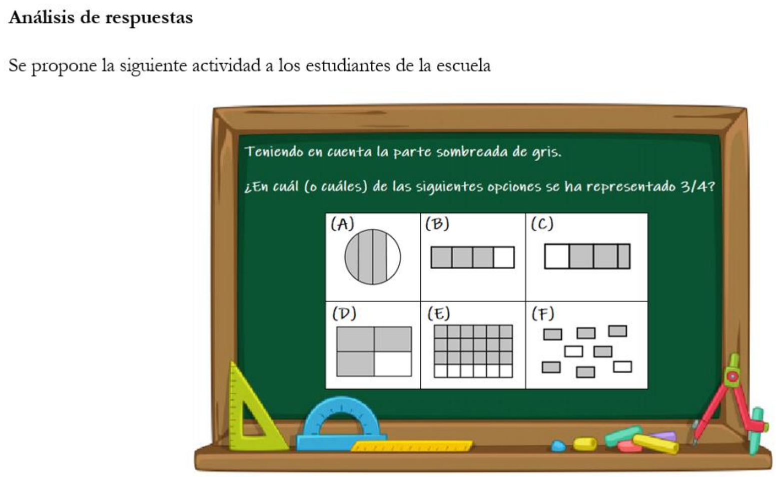


Figura 32: *Actividad de entrevista*

Al consultar a los entrevistados sobre cómo podría responder los estudiantes escolares la tarea matemática presente en la Figura 32, se obtuvieron seis opciones de respuesta posibles. De entre todas las opciones, dos incluyen únicamente figuras correctas y las restantes cuatro incluyen alguna figura incorrecta. En la Tabla 24 se muestra un resumen de las opciones de respuesta que surgieron a partir de las entrevistas. Junto a estas opciones se indican las estrategias que fueron definidas previamente y que se infiere aplicarían los escolares para responder las opciones indicadas por los entrevistados. Además, se agrega la frecuencia con la cual aparece cada opción de respuesta en las entrevistas. Es importante aclarar, que si bien, cada opción de respuesta se asocia con una o varias de las estrategias definidas previamente, no todas son explicitadas por los entrevistados.

Tal como podemos ver en la Tabla 24 la opción de respuestas que predomina entre los entrevistados es aquella en la cual los estudiantes escolares eligen como representante de ¾ a las figuras A, B, C y D. Las demás opciones de respuesta aparecen con menor frecuencia.

Cabe destacar que ninguno de los entrevistados mencionó como posible respuesta aquella que indica todas las opciones correctas.

Tabla 24: *Respuestas a la pregunta 1 -entrevista*

Opciones de respuestas de escolares	**Frecuencia**	**Estrategia**
B y D	2	Estrategia 2
B, D y E	1	Estrategia 2 y 4
A, B y D	3	Estrategia 2 y 5
A, B, C y D	6	Estrategia 1
A, B, D y E	1	Estrategia 2, 5 y 4
A. B, C, D , E y F	3	Estrategia 1, 2, 3, 4 y 5.

Como ya se mencionó, la opción de respuesta más frecuente fue la que contenía las imágenes A, B, C y D. Al pedir argumentos a los futuros maestros de por qué consideraban que los estudiantes escolares podían seleccionar estas opciones respondieron que, en general, los escolares tienden a contar partes pintadas y partes disponibles, y por este motivo, se inclinarían por estas opciones, en palabra de los propios entrevistados:

> **Entrevistado 1**: En la primera en realidad, como por lógica, que si tengo cuatro partes, en alguna de las figuras pinto tres.
>
> -----
>
> **Entrevistado 3:** Y en realidad, si no respetamos tamaños es lo que te decía, puede ser la A, puede ser la C [agrega A y C a las opciones B y D que venían de un discurso anterior]. Porque veo que hay cuatro partes, y que hay pintadas tres.
>
> -----
>
> **Entrevistada 4:** Yo creo que indicarían, lo que harían sería contar, la primer parte irían contando, indicarían la A, la B y la C. Se familiarizarían más con esa. Y la D. Porque como dice tres cuartos, ellos contarían y dirían, "bueno, los tres que están pintados representan el tres, y el otro el cuatro. Esos son los que indican tres cuartos.
>
> -----
>
> **Entrevistada 7:** [discurso anterior donde se indica las opciones A, B y D] Por ejemplo la C algunos la daría como correcta porque no toman... para ellos, pintaron tres cositos, tres espacios de los cuatro que hay disponibles. Y no se fijan a veces en el tema de que tienen que ser iguales esas partes.

A partir de las respuestas, podemos inferir que seis de los futuros maestros reconocen la estrategia 1 que implica encontrar al numerador y al denominador de una fracción como partes pintadas sobre el total de partes disponibles, sin importar si dichas partes son congruentes (presencia del indicador I1 del subdominio KFLM).

Por otro lado, tres de los entrevistados indican que los estudiantes escolares podrían seleccionar las opciones A, B y D. En relación a esta opción, el E6 indica que los estudiantes escolares podrían descartar la opción C porque “(....) hay tres cuadraditos pintados pero uno es más chiquito (...)” (E6, 2021). En general, los otros dos entrevistados no brindan argumentos de por qué se descartaría la C o dichos argumentos son confusos. En este sentido, la E3 indica que los escolares elegirían la opción A, B y D, pero cuando se le pregunta por esta elección, manifiesta: “La A, me genera la duda, porque en realidad como que las puntas no respetan el tamaño de los cuatro cuartos. O sea, si completáramos cuatro cuartos, no están repartidos en partes iguales. Lo mismo me pasa con la C (...)” (E3, 2021).

En resumen, vemos que los entrevistados, en general, no reconocen una estrategia clara para que los escolares elijan únicamente las opciones A, B y D. Tal como se indicó en la Tabla 24, se infiere que los escolares elegirían esta opción pues observan que en el caso de la opción B y D se tienen las figuras partidas en cuatro partes iguales y hay tres pintadas (Estrategia 2), agregando la opción A por ser familiar al contexto escolar (Estrategia 5) (presencia del indicador I1 del subdominio KFLM).

Dos de los entrevistados respondieron que una posible respuesta podía ser la B y D porque son en las que las partes son iguales. En relación a esta opción se les pide al E2 y E3 que expliquen por qué un estudiante escolar elegiría esta opción, a lo que responden:

> **Entrevistado 2:** Porque ahí sí están divididos los cuadraditos en partes iguales y realmente están pintados tres cuartos. Digamos. Me cuesta este ejercicio de pensar como un estudiante. Lo que pasa que a veces se apoyan mucho en tener que estar pintando. Yo ahora estoy en práctica en un quinto año, y salen con un círculo pintando a que equivale esa fracción. Están muy apegados a la representación gráfica.
>
> ----
>
> **Entrevistado 3:** Porque si me dice que tengo representados tres cuartos, en realidad, en cuatro partes iguales tendría la B y la D, entiendo, a primera vista.

A partir de dicha opción podemos inferir que entre dos de los entrevistados surge la estrategia 2 de reconocer figuras que tengan cuatro particiones iguales de las cuales tres están pintadas (presencia del indicador I1 del subdominio KFLM).

Por otra parte, uno de los entrevistados manifiesta que los escolares podrían seleccionar como respuesta correcta las opciones B, D y E, aunque no indica explícitamente cuál sería la estrategia seguida por los escolares para seleccionar esta opción. Un extracto de la entrevista que evidencia la presente afirmación indica:

> **Entrevistado 2:** Ahora que estoy viendo también podría surgir la E.
>
> **Investigador:** ¿Un estudiante que conteste sólo la E?
>
> **Entrevistado 2:** Si, ahora que estoy mirando. No veo bien yo. Agrandámelo. Ah sí son, si yo miro [cuenta], si la E también estaría. Ahí hay tres cuartos también.
>
> **Investigador:** ¿El estudiante que contesta la E, sólo contesta la E, o contesta alguna más?
>
> **Entrevistado 2:** Agregaría la B y la D, y la E.

También, como posible respuesta a la actividad entre tres de los entrevistados, surge la opción en donde se seleccionan las seis imágenes. En este sentido, dos de los entrevistados destacan que, además de elegir aquellas imágenes donde de cuatro particiones se pintaron tres (estrategia 1), se podrían seleccionar la E y la F por ser representaciones equivalentes (estrategias 3 y 4). En este sentido, E1 reporta que "(...) de acuerdo a las figuras que tengo acá, buscar... no sé si diría el doble. Porque en realidad serían como buscar fracciones equivalentes tanto en la E como en la F" (E1, 2021). Sumando a esta intervención, el E1 indica que los estudiantes escolares podrían contar, por ejemplo, en la figura F el total de cuadraditos (8) y ver que hay seis pintados, siendo ocho el doble de cuatro y seis el doble de tres. En coherencia con lo expuesto por E1, el E4 también manifiesta que los escolares podrían agregar las opciones E y F. En este sentido, E4 indica claramente la estrategia 4 que implica observar a una parte dividida en varias partes y considerarla como una sola (presencia del indicador I1 del subdominio KFLM), pues expresa:

> **Entrevistado 4**: En la E. Que la parte que está pintada de gris representaría los tres cuartos. Porque está dividido... viste que si vos contás las líneas está dividido, una línea, dos líneas, tres líneas, cuatro líneas. Que cada línea representa una parte de los tres cuartos, y que lo que pintaron fue tres cuartos, tres líneas de la figura.

En relación a elegir todas las figuras, el tercer entrevistado E3 no manifiesta con claridad por qué agregarían las opciones E y F, pero si explica por qué se agregaría la opción A manifestando la estrategia 5 que implica elegir las figuras por familiaridad en el contexto escolar (presencia del indicador I1 definido para el subdominio KFLM). En este sentido, indica "Yo creo que la A, por ser redonda, siempre, cuando estamos dando clase acudimos a la piza. Entonces la A va a ser una de las favoritas y no les va a importar como está partida" (E3, 2021).

Por último, uno de los entrevistados indica que se podría responder las figuras A, B, D y E por descartar la F y la C, en pablaras del propio E4:

> **Entrevistado 4:** [Pausa] Que otro estudiante diga, pero que diga por ejemplo, la D y la E, y saque la C, porque viste que los cuadraditos no están proporcionales al tamaño. Y que diga que bueno, como la C no tiene los cuadraditos proporcionales y la F tiene más cantidad de cuadraditos pintados, que tres, y son mayor, diga que sólo son, la D, la E, la A y la B. Que aparte como la C y la F.

Vemos que en relación a esta respuesta se evidencia la estrategia 6 que implica que los estudiantes escolares desechen opciones por no ser familiares al contexto escolar (presencia del indicador I1 del subdominio KFLM).

A lo largo del análisis realizado anteriormente, podemos apreciar que algunas de las estrategias aparecen explícitamente a lo largo de las entrevistas. Para ordenar las conclusiones a las cuales se arriba en este apartado, resumimos en la Tabla 25 la frecuencia con la cual aparece cada una de las estrategias que se indicaron al inicio de esta sección.

Tabla 25: *Resumen de estrategias*

Estrategia	Frecuencia
(Estrategia 1) Observar en qué figuras hay cuatro particiones de las cuales tres están pintadas	6
(Estrategia 2) Observar en qué figuras hay cuatro particiones iguales de las cuales tres están pintadas	2
(Estrategia 3) Agrupar a un conjunto de objetos y considerarlos como una parte	0
(Estrategia 4) Observar a una parte dividida en varias partes y considerarla como una sola	2
(Estrategia 5) Elegir las figuras por familiaridad en el contexto escolar	1
(Estrategia 6) Descartar opciones por no ser familiares al contexto escolar.	2

Fuente: Tabla de elaboración propia.

8.3.2 Conocimiento de dificultades o errores comunes a priori

En esta sección detallamos los aportes que se destacan a partir de las entrevistas en cuanto a la categoría *Fortalezas y debilidades en el aprendizaje del concepto de fracción (F)* definida para el subdominio KFLM. En particular, en este subdominio, recogemos evidencias sobre el indicador (F1) *Conoce errores o dificultades a priori.*

Para resolver la actividad matemática que se presenta en la Figura 32, vemos que los estudiantes escolares deben superar ciertas dificultades que son reportados en la literatura como frecuentes. En particular, consideramos que al intentar dar respuesta a esta actividad las dificultades que predominan son: (D3) No tener en cuenta la equidad de las partes (Pazos, 2009, p.42), (D6) No considerar a las partes como un todo (Llinares y Sánchez, 1997), (D7) Tratamiento de magnitudes discretas: no reconocer la colección como la unidad y no considerar cada subconjunto como una parte de la unidad (Obando, 2003).

En la primera parte de la entrevista, tal como ya se mencionó, se les presentó la actividad (ver Figura 32) y se les consultó sobre cómo podrían los estudiantes escolares responderla. Además, se les pidió que justificaran sus respuestas. Esto nos permitió detectar si los futuros maestros conocían algunos de las dificultades que reportamos en el párrafo anterior.

A lo largo de las siete entrevistas, cuatro de los entrevistados dieron cuenta claramente del conocimiento de la dificultad (D3) No tener en cuenta la equidad de las partes (Pazos, 2009, p.42) (presencia del indicador F1). En este sentido, el E2 al ser consultado sobre por qué consideraba que un estudiante escolar podía contestar las opciones A, B, C y D respondió:

“Según las cantidades que estén pintaditas es a lo que corresponden. Como hay tres pedacitos pintados aunque no correspondan a la misma cantidad, no estén divididos en forma igual, ellos ven ahí igual tres cuartos” (E2, 2021). El E3 manifiesta del mismo modo que el E2 “(...) veo que hay cuatro partes, y que hay pintadas tres (...)” (E3, 2021). En la misma línea, el E7 señala “(...) pintaron tres cositos, tres espacios de los cuatro que hay disponibles. Y no se fijan a veces en el tema de que tienen que ser iguales esas partes.” (E7, 2021). Y finalmente, la E5 señala “Y en la C, a pesar de que hay una parte más chica, igual hay tres partes sombreadas [...] no van a tener en cuenta que deben estar partidas proporcionalmente, que deben ser porciones iguales digamos” (E5, 2021).

La dificultad (D7) Tratamiento de magnitudes discretas: no reconocer la colección como la unidad y no considerar cada subconjunto como una parte de la unidad (Obando, 2003) fue mencionada únicamente por el entrevistado E5, señalando: “Yo creo que ninguno de los niños se iría por la F, porque está disgregada de todos. Porque están como separadas, dispersos (...)” (E5, 2021), aunque en esta respuesta no queda claro qué dificultad presentarían los escolares al ver la representación F.

Es importante mencionar que E7 indica que los casos que se presentan en las figuras E y F resultarían complejos para los escolares, pero no indica por qué y, por tanto, no da cuenta del conocimiento de alguna de las dificultades mencionadas (presencia del indicador F1).

Tal como podemos ver, de las tres dificultades que podrían reconocerse explícitamente sólo dos fueron mencionadas (presencia del indicador F1 definido para el subdominio KFLM). La que implica no considerar a las partes como un todo (Llinares y Sánchez, 1997) no se mencionó como una posible dificultad a superar por los estudiantes escolares.

8.3.3 Conocimiento de dificultades o errores comunes a partir de producciones de escolares

En esta sección se analizan los aportes de las entrevistas en cuanto a la categoría *Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje del Concepto de Fracción (F)* definida para el dominio KFLM. En particular, recogemos evidencias sobre el indicador (F2) *Reconoce, en las respuestas de estudiantes escolares, errores o dificultades comunes.* A lo largo de la entrevista se presentaron de a una las respuestas de tres estudiantes escolares para la actividad que se muestra en la Figura 32. Luego de que los entrevistados leyeran las respuestas de los escolares, se les consultó:

¿Cómo corregirían la respuesta del estudiante? y ¿Qué fortalezas y debilidades presenta el estudiante respecto al concepto de fracción?

Para comenzar el análisis de las respuestas se presentaron a los entrevistados tres respuestas de escolares que recogen diferentes fortalezas y debilidades. La respuesta del primer personaje, Víctor, mostraba el error de no reconocer la propiedad “partes congruentes”. La respuesta del segundo personaje, Tere, superaba la dificultad de Víctor, pero presentaba la dificultad de no reconocer representaciones en contextos discretos o continuos que sean equivalentes. Y la respuesta del último personaje, Álvaro, supera las anteriores dificultades y es correcta.

A continuación comenzamos analizando las respuestas que brindaron los futuros maestros frente a la producción de Víctor (ver Figura 33). Tal como podemos ver, Víctor, contesta de forma incorrecta indicando que las figuras A, B, C y D son las que representan 3/4 sin importar si las partes en que se ha dividido a la unidad son congruentes.

Respuesta de Víctor (V)

V: Mmmm, bueno yo creo que la figura A, B, C y D representan tres cuartos.

M: ¿Por qué crees que son esas figuras?

V: Porque en las figuras A, B, C y D hay 3 partes pintadas de 4, es decir tres cuartos.

Figura 33: *Respuesta de Víctor*

En primer lugar, frente a la pregunta sobre cómo corregirían la respuesta que brindó Víctor, cuatro de los siete entrevistados (E2, E3, E5 y E7) indican claramente que la respuesta dada por el escolar es incorrecta, y en algunos casos, aunque no responden directamente indicando que es incorrecta, brindan orientaciones para que el escolar note el error cometido (presencia del indicador F2). En palabras de los propios entrevistados:

> **Entrevistado 2:** Yo le volvería a preguntar, a volver a formular la pregunta. "¿Estás seguro que las preguntas A y C realmente representan tres cuartos? Fijate en la dimensión de los cuadraditos. ¿Son todos iguales?" Volvería a hacer una pregunta. No cortaría el diálogo. Obviamente también el tema de la E, que dejó afuera.
>
> ---
>
> **Entrevistado 3:** Primero lo que te explicaba. Primero porque me parece que la A y la C no me parece que sean correctas, porque entiendo que tiene que estar representados en partes iguales.
>
> ---
>
> **Entrevistado 5:** [...] Entonces imagina que la B y la C son una barra de chocolate. Si tenemos cuatro niños, si agarramos la C... ¿Tú crees que todos los niños comerían la misma cantidad de chocolate si agarran la barra C que la barra B? ¿O habría algún niño que no esté de acuerdo con el pedacito que recibe? Ahora, con la A, yo le diría "¿Tú

> crees que en la A, si fuera una piza (porque siempre recurrimos al ejemplo del chocolate), tú crees que los niños que coman de esa piza van a comer la misma cantidad los 3 niños que van a comer esos pedacitos grises?" Así le diría.
>
> ---
>
> **Entrevistado 7:** [pausa]. [...] Ellos lo asocian a esto que él dice. Hay tres partes pintadas de cuatro. Y se ven los tres cuartos. Le preguntaría "En la opción A, todas las partes son iguales Víctor?" O en la parte C... Le haría visualizar.

Por otro lado, el E1 no reconoce claramente que la respuesta de Víctor es incorrecta y frente a la pregunta reiterada de si la respuesta es correcta piensa y evade la respuesta. A lo largo del diálogo logra identificar que la figura C no está dividida en partes congruentes y reconoce que cuando respondió a esta pregunta no lo tomó en cuenta, en este sentido, indica: “Me acabo de dar cuenta de algo que no me había dado cuenta en la prueba, cuando la hice. En realidad la figura C no tiene cuatro reparticiones iguales” (E1, 2021). En consonancia con la respuesta brindada por E1 tenemos la de E4, pues al corregir la producción de Víctor indica que las opciones A, B y D son correctas pero que la C no. En palabras del propio entrevistado: “Le pondría que A, B y D sí me parece que son correctas, pero que C no porque no es proporcional... los cuadraditos no están proporcionalmente” (E4, 2021).

Al corregir la respuesta de Víctor, E6 inicialmente indica que la respuesta del estudiante es incorrecta porque incluye la opción C, en este sentido, expresa: “El C no podría ser porque el último cuadradito es más chiquito que los otros tres” (E6, 2021). Al continuar con la entrevista logra indicar que la opción A también es incorrecta, en consecuencia, señala: “[...]en realidad el primer parte sombreada de A, no representa lo mismo que la segunda y la tercera hilera” (E6, 2021).

En cuanto al reconocimiento de la dificultad de no tener en cuenta que las partes deben ser congruentes, que está presente en la respuesta de Víctor, inferimos que cinco de los entrevistados (E2, E3, E5, E6, E7) identifican dicha dificultad con claridad (presencia del indicador F2 del subdominio KFLM). En el caso de los otros dos entrevistados (E1 y E4), reconocen esta dificultad únicamente para el caso C, por lo que inferimos que no la reconocen con claridad. En este sentido, podemos ver que ellos mismos presentan dicha dificultad. En palabras de algunos de los entrevistados:

> **Entrevistado 4:** Por ejemplo acá cuando le preguntamos tres cuartos, él lo que hace es, cuenta los cuadraditos. Y dice "ta, si son tres los que están pintados... para representar tres cuartos tengo que tener tres pintados de cada figura". Sea un cuadrado, una circunferencia, no sé, él va a contar que tengamos tres cuadraditos nomás pintados. Que no tenga más que eso.

Entrevistado 6: En realidad él eligió la A, la B, la C y la D... claro porque, supongo que Víctor debe pensar, que los tres cuadraditos, que tiene que haber pintado sí o sí tres cuadraditos no importa si son más grandes o más chicos.

Entrevistado 7: [...]Ellos lo asocian a esto que él dice. Hay tres partes pintadas de cuatro. Y se ven los tres cuartos.

Posteriormente, se les presenta a los entrevistados la respuesta de Tere que se puede visualizar en la Figura 34. Esta estudiante supera la dificultad antes presentada ya que reconoce que las partes en la representación gráfica deben ser congruentes, pero solo identifica como representantes de ¾ aquellas representaciones que tienen exactamente tres partes pintadas de cuatro geométricamente iguales. En este sentido, descarta las figuras E pues la unidad tiene mayor número de divisiones, y también descarta a la F por ser una representación discreta con seis rectángulos pintados de forma aislada. Tere presenta en su discurso dos dificultades, la primera es la que se asocia con la figura E pues no reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes (representaciones equivalentes). La segunda dificultad es la que se asocia con la representación F y consiste en no considerar a un grupo de partes como una parte (representaciones discretas).

Respuesta de Tere (T)

Tere: Creo que las figuras B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales y hay tres pintadas de gris. Las figuras A y C tienen 3 partes de 4 sombreadas, pero las partes no son iguales...
M: ¿y la figura E? ¿Qué piensas?
T: La figura E no son tres cuartos porque si te fijas están divididos en 24 partes iguales y hay pintadas 18.
M: Entonces la F...
T: ...Tampoco, eso son 6 rectángulos pintados.

Figura 34: *Respuesta de Tere*

Al analizar las repuestas de los entrevistados podemos ver que el E1, E5 y E7 indican que la respuesta de Tere tiene partes correctas y partes incorrectas. En consecuencia, mencionan que es correcto lo que indica para el caso de las figuras B y D, pero incorrecto lo que indica para el caso E y F. En palabra de los propios entrevistados:

Entrevistado 1: En realidad, Tere lee las, por ejemplo la E y la F... bueno ahí ya se da cuenta que en la A y la C, las partes no son iguales. Que si bien está dividido en cuatro no son iguales, entonces no son tres cuartos. Y en la B y en la D sí. Lo que ella deja por fuera es la E y la F. Porque cuenta los cuadraditos, y no son tres cuartos. Al menos no así, expresados directamente. Lo que se podría hacer es llevarla por decirla así, o guiarla para que pueda ver si hay relación entre las fracciones, entre dieciocho sobre veinticuatroavos y seis octavos.

Entrevistado 5: Bueno. Primero le diría que está muy bien la observación. Le diría "muy bien Tere, se ve que entendiste la propuesta. Tienes claro que las partes deben ser iguales. Y en la figura E, si tu pudieras convertir esa fracción que tienes ahí. ¿Qué fracción tendrías en la figura E? ¿La podrías convertir en una fracción más chica? Por ejemplo le preguntaría. ¿Qué fracción tienes en la figura E? ¿Porqué no la escribes en números?" Y bueno ahí Tere diría, "dieciocho, veinticuatroavos." Y ahí depende de si ya lo han visto o no. "¿Hay alguna manera de saber si esa fracción puede ser más chica?

[más adelante]

Entrevistado 5: [...] Y en la F, también. Recurriría en la E y en la F, recurriría a que escribiera la fracción que ve.[...]

Entrevista 7: Con respecto a la primera expresión de que "creo que la figura B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales, y hay tres pintadas de gris"... o sea, con respecto a la primera expresión, diría que es correcto. [...] Ahora, con respecto a las respuestas siguientes y la interacción con la maestra... creo que no tiene la noción de la fracción como cociente...

Sin embargo, los entrevistados E2, E3, E4 y E6 indican de forma explícita o no que la respuesta de Tere es correcta. En este sentido, los entrevistados E2 y E3 mencionan de forma implícita que están de acuerdo con que las figuras B y D representan ¾, en este sentido, E2 señala: “Bien. En la primera respuesta de ella no intervendría[...]” (E2, 2021) mientras que E3 nos dice “Yo me identifico más con el razonamiento de Tere que con el de Víctor, por ejemplo. Tere habla, especifica de las partes iguales y hace el conteo de las figuras” (E3, 2021). Los entrevistados E4 y E6 señalan de forma explícita que están de acuerdo con Tere respecto a su respuesta para las figuras B y D. Es así que E4 señala: “[...]cuando responde que la B y la D están divididas en partes iguales, le diría que sí, que es correcto” (E4, 2021). Y por otro lado, E6 afirma: “Si yo creo que Tere va un poco más acertada, creo, no estoy segura. Porque en realidad, los tres cuadraditos son iguales entre sí [...]” (E6, 2021).

Para el caso de las figuras E y F, el E4 menciona que está de acuerdo con el razonamiento de Tere pues efectivamente en E hay 18 cuadraditos pintado de un total de 24, mientras que en la F para representar ¾ debería estar cada uno de los rectángulos divididos en cuatro y tres pintados o solo mostrar cuatro rectángulos y tres pintados. Así mismo, ante la pregunta si está de acuerdo con lo expuesto por Tere para el caso E y F el E6 responde de forma afirmativa.

Llama la atención el hecho de que los entrevistados E2 y E3, a diferencia de E4 y E6 manifiestan que en el caso de la figura E podrían considerar cuatro filas en las cuales tres están pintadas, pero igualmente, deciden que el argumento expuesto por Tere es correcto. Vemos que en el caso de E2 y E3 conviven de manera contradictoria la idea de que una parte puede estar dividida en otras partes (fracciones equivalentes) y el hecho de que si un todo tiene más divisiones que cuatro, no puede ser representante de ¾. Para el caso de la figura F, el E3 intenta aplicar el razonamiento de encontrar filas como pensó anteriormente en la figura E y en relación a ello, expresa: "Bueno, en la F todavía es más claro. Porque ni siquiera lo puedo hacer por filas. Porque tengo tres filas por así decirlo, donde en la primera tengo tres pintadas y están rectas. Pero ya en la segunda tengo dos" (E3, 2021). Mientras que para la figura F el E2 señala "La F estoy de acuerdo con ella, no representa tres cuartos. A no ser que yo tratara de unir esos cuadraditos" (E2, 2021), posteriormente a este argumento, señala que efectivamente la figura F representa ¾ y por tanto, debería de guiar a Tere para incluir en su respuesta la figura F.

A lo largo del análisis que hacen los futuros maestros de la respuesta brindada por Tere, podemos inferir que los entrevistados E2, E3, E4 y E6 no identifican la dificultad que se presenta en la figura E, en donde la escolar no está considerando que una parte puede estar dividida en otras partes (fracción equivalente). Dichos entrevistados manifiestan ellos mismos la dificultad, por lo que inferimos que no la reconocen como tal.

Respecto a la misma dificultad podemos ver que si bien E1, E5 y E7 responden de manera correcta en cuanto al razonamiento de Tere, no identifican con claridad la dificultad que ella presenta al observar la representación gráfica realizada en la figura E. En este sentido, vemos que E1 y E5 manifiestan que Tere no reconoce fracciones equivalentes y dan argumentos que permitirían inducir a la escolar a reconocer que esta representación se corresponde con ¾. Por otro lado, E7 manifiesta que si Tere calculara los ¾ de 24 ahí obtendría 18 por lo que se indica que la dificultad está en no considerar al ¾ como operador, en este sentido expone "(...)no saben calcular los tres cuartos de un número(...)" (E7, 2021).

En relación a la dificultad que presenta Tere respecto a representar ¾ pero en un conjunto discreto (figura F), podemos ver que solo E5 manifiesta la presencia de dicha dificultad y en relación a ello, señala: "Ella no está concibiendo el todo que está ahí. El conjunto F digamos, no lo está concibiendo" (E5, 2021). En el caso de E3, E4 y E6 como vimos anteriormente, los propios entrevistados presentan la dificultad por lo que no la reconocen en el discurso de Tere. Mientras que E1, E2 y E7, tampoco identifican la dificultad específica que presenta Tere al mencionar que la representación de la figura F son seis rectángulos. En relación a esto último, podemos ver que si bien E1, E2 y E7 mencionan la idea de que la F se debería incluir por ser equivalente o porque si calcula ¾ de 8 le da 6 no logran visualizar que el problema principal está en que los rectángulos estén separados.

Para dar cierre al análisis de respuestas se les presenta a los entrevistados la respuesta de Álvaro (ver Figura 35). En relación a ella podemos ver que el escolar contesta correctamente y supera las dificultades que se presentan en las respuestas de Víctor y Tere.

Respuesta de Álvaro (A)

A: Para mí son la B, D, E y F. La B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales y hay tres pintadas de gris. Mientras que en la E y F lo hice distinto.
M: ¿Cómo? Explícalo
A: Bueno....mmmm pues así, mira. En la figura E, si te fijas cada línea tiene 6 cuadraditos, es decir son todos iguales, y como hay 3 líneas pintadas de gris de las 4 entonces son tres cuartos.
M: ¿y en la F?
A: ...para la F también son tres cuartos porque si haces así (agrupando los rectángulos de 2 en 2), obtienes cuatro grupos, 1, 2 y 3 (señalando a la vez que cuenta cada grupo pintado) están pintados, que son tres grupos pintados de gris de los cuatro que tenemos.

Figura 35: *Respuesta de Álvaro*

Respecto a la respuesta de Álvaro podemos ver que E3, E5 y E7 identifican con claridad que la repuesta de dicho escolar es correcta. Por otro lado, E2, E4 y E6 manifiestan ciertas dudas frente a la respuesta de Álvaro y en este sentido, al ser consultados por las diferentes expresiones de Álvaro, los entrevistados expresan dudas:

Investigador: ¿Cómo corregirías vos la respuesta de Álvaro entonces?

Entrevistado 2: El tema, es la cuestión de la E... que también el... Claro, la cuestión es el recurso. Yo ahí como que, [lee] "cada línea tiene seis cuadraditos, es decir todos son iguales. Y como hay tres líneas pintadas de gris, entonces son tres cuartos". Si eso es verdad, él ve, si él considera así yo se lo tendría que considerar como bien a eso.

Entrevistado 4: [...]Y cuando hace lo de la figura E y la figura F, que en la figura F agrupa, sí. Pensándolo así, si tienen razón. Si los agrupas, si usas la estrategia de agrupar cuadraditos, sí, están representados los tres cuartos.

[más adelante]

Investigador: Entonces la F ¿representaría tres cuartos para ti?

Entrevistado 4: No. Para mí no sigue representando. Pero viendo la estrategia que él usa, tendría que decirle que sí que está bien en agrupar... que está correcto que los agrupe y que si los agrupa sí representa los tres cuartos. Pero si era separado como estaba yo diría que no.

Entrevistado 6: [...] Como que hizo equivalencias por ejemplo en la F. No sé si la palabra es equivalencia, pero como que de una fracción buscó la equivalente y que estaba ahí en lo que le marcó la maestra. Pero en realidad yo ponele, esta actividad no era para hacer eso. Ponele, si hubiera otra actividad que dice "busca equivalencias", capaz que sí. Acá no está buscando equivalentes.

[más adelante]

Investigador: ¿Y entonces lo corregirías como correcto o como incorrecto? ¿Qué le dirías?

Entrevistado 6: Que en realidad, creo yo, hace mucho que no veo fracciones, pero en realidad, está en lo correcto pero no es lo que se pide.

Por otro lado, E1 señala que la respuesta de Álvaro no es correcta y, tras analizar los procedimientos que aplica, concluye que lo que hace el escolar es contar y agrupar. Frente a este razonamiento se le consulta a E1 si es correcto lo realizado por Álvaro, a lo que contesta: “No. Creo que en realidad está confundiendo conceptos” (E1, 2021).

Cabe destacar que únicamente E1 indica que el procedimiento realizado por el escolar para la representación E es incorrecto. Asimismo, E6 manifiesta que el escolar está buscando fracciones equivalentes, pero no es lo pedido en la actividad. Los demás entrevistados expresan que el procedimiento es correcto, aunque algunos presentan ciertas dudas.

Por otro lado, para el caso del argumento que usa el escolar en la respuesta de la figura F el E1 manifiesta que el escolar no argumenta correctamente y señala que está confundiendo conceptos. E4 no expresa con claridad si lo realizado en el caso F es correcto o no pues, frente a la pregunta de si es correcto, presenta dudas. E2 no analiza el procedimiento aplicado por el escolar en el caso F. Asimismo, E6 indica que lo realizado en el caso F no es lo que se pide en la actividad pese a que está bien. Mientras E3, E5 y E7 manifiestan acuerdo con el procedimiento.

A modo de resumen, podemos inferir a partir del análisis anterior que la dificultad que resultó más sencilla de reconocer entre los entrevistados es la que implica no reconocer partes congruentes. En particular, dicha dificultad es reconocida explícitamente por cinco de los futuros maestros y dos la reconocieron de forma parcial pues no excluyeron la imagen A donde las partes no eran congruentes. Así mismo, podemos ver que la dificultad de considerar que una parte puede estar dividida en otras partes (fracciones equivalentes) no es reconocida por los entrevistados, únicamente tres de ellos mencionan alguna idea relacionada con fracciones equivalentes, pero no lo asocian con la dificultad expuesta por el escolar en su respuesta. Finalmente, la dificultad que se presenta al trabajar con conjuntos discretos que implica considerar un grupo de partes como una parte es reconocida únicamente por uno de los entrevistados, mientras que otros dos mencionan una cierta dificultad pero que no parte del análisis del argumento brindado en las respuestas de los escolares. En la Tabla 26 se resume la información que se expone en este párrafo.

Tabla 26: *Dificultades reconocidas en respuestas de escolares*

¿Reconocida?	No reconoce partes congruentes	Una parte puede estar dividida en otras partes (fracciones equivalentes)	Considerar un grupo de partes como una parte (fracciones en conjuntos discretos)
Si	5	0	1
Parcialmente	2	3	2
No	0	4	4

Fuente: Tabla de elaboración propia.

8.3.4 Conocimiento sobre imagen conceptual de la fracción

En esta sección se analizan los aportes de las entrevistas en cuanto a la categoría *Teorías del aprendizaje matemático (T)* definida para el dominio KFLM. En particular, recogemos evidencias sobre el indicador *(T1) Identifica imágenes de un concepto en producciones de escolares.* Tal como ya se mencionó a lo largo de la entrevista se presentaron de a una las respuestas de tres estudiantes escolares para la actividad que se muestra en la Figura 32. Es importante señalar que para recoger evidencias sobre este indicador únicamente se consideran las respuestas de los escolares Víctor y Tere debido a que son las que muestran dificultades en el concepto de fracción. Para recoger evidencias en cuanto al indicador mencionado en esta sección se les consultó a los entrevistados: ¿Qué aprendizajes/conocimiento tiene el estudiante acerca de las fracciones? y a partir de esta pregunta, se les pidió justificación de sus respuestas.

Tal como se mencionó anteriormente, cuando hablamos de imagen conceptual se hace referencia a todas las fotos mentales que se presentan sobre un cierto concepto (Tall y Vinner, 1981). En este sentido, identificar la imagen que los escolares presentan del concepto de fracción implica el reconocimiento de propiedades o procedimientos relacionados con dicho concepto a partir de sus discursos. En particular, Víctor, presenta una imagen básica de la fracción donde ésta implica una partición de un todo continuo en tantas partes (no necesariamente iguales) como indica el denominador de una cierta fracción y en donde se pintan tantas partes como indica el numerador de la fracción. Por otro lado, Tere, muestra una imagen conceptual que implica reconocer a una fracción dada únicamente en un todo continuo, donde el denominador de la fracción indica en cuántas partes iguales se divide al todo y el numerador indica cuántas de esas partes deben pintarse. Es importante señalar que, según los argumentos presentados, Tere no logra concebir a una colección de objetos como un todo (caso F) y tampoco logra considerar que una parte puede estar dividida en otras partes (caso E). En relación a esto último, para identificar la imagen conceptual que maneja la escolar se debería identificar que la estudiante logra reconocer ¾ siempre que la fracción este dada en todo continuo y, además, las particiones sean exactamente cuatro iguales.

Podemos ver que, en relación a la imagen conceptual que muestra Víctor, los siete entrevistados identifican el procedimiento que aplica dicho escolar para encontrar la fracción ¾. En este sentido, algunos entrevistados señalan:

> **Entrevistado 1:** Que el numerador indica las partes que tengo que seleccionar, y el denominador indica las partes en las que yo divido un todo.
>
> ----
>
> **Entrevistado 3**: Porque tiene cuatro partes que se supone que son iguales, y tiene pintada tres.[...]
>
> ----
>
> **Entrevistado 4:** Y para mí cuenta las partes. O sea, si me pongo en la figura A, él dice "bueno a ver. El círculo está dividido en cuatro partes. La maestra me pregunta cuánto es tres cuartos. ¿Yo cómo sé cuánto es tres cuartos? Porque bueno, tres en este caso... tiene cuatro partes, tres están pintadas. Representas tres cuartos. [...]

En la entrevista se les pide a los futuros maestros que señalen otras representaciones que el escolar, Víctor, reconocería como representantes de ¾, según su concepto. Esto nos permite explorar qué imágenes se formaron los futuros maestros a partir de la selección realizada por el escolar. En este sentido, se reporta que, pese a que todos los entrevistados reconocen en la concepción de Víctor el procedimiento que aplica, no todos identifican variedad de representaciones. Incluso algunos incluyen representaciones que no se podrían inferir a partir del razonamiento del escolar. En la Tabla 27 podemos ver las imágenes que son presentadas por los entrevistados y que ellos entienden serían seleccionadas por Víctor.

En el caso del E1 y E7 podemos ver que únicamente dibujan representaciones donde las particiones no son iguales, en este sentido, expresa E1: “(...)creo que cualquier figura que se coloque, dividida en cuatro, y haya tres porciones de esas pintadas, él las va a seleccionar” (E1, 2021) y E7 “Creo que se alinearía a la respuesta C por ejemplo, en la repartición... en la representación...” (E7, 2021).

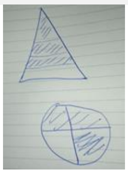
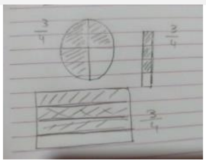
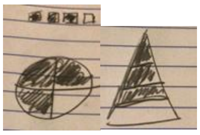
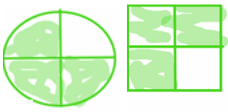
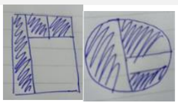
Por otro lado, E2 y E5 eligen representaciones donde el todo está partido en partes iguales. En el caso de E2, se indican dichas representaciones porque plantea que al intervenir en el error del estudiante éste se corregiría, de donde inferimos que no identifica diferentes representaciones de la imagen conceptual que tiene Víctor. Mientras que E5 indica representaciones donde el todo está fraccionado en partes iguales, pero además agrega: “Elegiría cualquier otra figura que estuviera partida en cuatro, no importa si son iguales o no” (E5, 2021).

En el caso de E3 y E6 podemos ver que incluyen imágenes que se corresponden con representaciones discretas. Inferimos, a partir de la respuesta de Víctor, que no se puede indicar si el escolar incluiría representaciones discretas pues todas las que elige están dadas en contextos continuos, por lo que E3 como E6, al incluirlas no dan cuenta de una identificación de la imagen conceptual de fracción que se ha formado Víctor para la fracción 3/4.

En el caso de E4, vemos que indica una variedad de representaciones que serían elegidas por Víctor, donde se incluyen imágenes con particiones iguales y diferentes. Es por ello que afirmamos que E4 identifica diferentes representaciones de forma correcta respecto a la imagen conceptual que se ha formado el escolar. Pese a esto, vemos que incluye la figura rectangular que está partida por sus diagonales indicando de forma incorrecta que esta representación no se corresponde con 3/4, y al consultarle si esa figura se corresponde con ¾ señala “No, no serían, pero el razonaría que sí. Yo creo que el razonaría que sí...” (E4, 2021). Esto último da cuenta de una dificultad en el concepto de fracción del propio entrevistado. Este y otros problemas conceptuales que surgen a lo largo de las entrevistas serán analizados más adelante.

Por otro lado, veamos que los siete entrevistados indican que Víctor seleccionaría un círculo dividido en cuatro partes. En algunos casos, como ya se mencionó anteriormente, el círculo no estaría dividido en partes iguales mientras que en otros sí. Inferimos que este hecho se asocia a que el círculo es una de las representaciones que predomina en la escuela y por eso se prefiere.

Tabla 27: *Imagen conceptual, Víctor*

Entrevistado 1	Entrevistado 2	Entrevistado 3	Entrevistado 4
			
Entrevistado 5	**Entrevistado 6**	**Entrevistado 7**	
			

Fuente: Tabla de elaboración propia.

Respecto a la respuesta de Tere y la imagen conceptual que se ha formado, podemos ver que todos los entrevistados identifican que el procedimiento seguido por la escolar implica buscar de un todo fraccionado aquel donde se están dando cuatro particiones iguales y se han pintado tres. En este sentido, algunos entrevistados señalan:

> **Entrevistado 1:** Que las partes en que se divide la fracción tiene que ser iguales para que pueda ser útil la fracción... la división, de la parte total.
>
> ---
>
> **Entrevistado 4:** Que en este caso por ejemplo, para que sean tres cuartos tienen que ser partes iguales de la figura. En este caso que está representados ella lo que busca es que sean partes iguales.
>
> ---
>
> **Entrevistado 6:** Que Tere a diferencia de Víctor, en realidad ella sí considera a las fracciones como que tienen que ser iguales. Por ejemplo con la A, y con la C no pasa. Que aunque estén pintado tres cuartos, no quiere decir que sean porque no son iguales entre sí esos tres cuart... esos cuadraditos.

En el caso del E7 se le consulta si Tere elegiría como opción un rectángulo dividido en cuatro partes por sus diagonales, a lo que contesta que no lo elegiría. En este sentido, vemos que el entrevistado afirma la idea de reconocer el procedimiento seguido por Tere ya que los cuatro triángulos que se ven a simple vista no son iguales. Llama la atención el hecho de que para el propio entrevistado la representación de un rectángulo dividido en cuatro partes por sus diagonales no representaría ¾, aquí vemos que el propio entrevistado presenta dificultades con el concepto de fracción. Esta dificultad conceptual será analizada más adelante.

Cuando se hace la pregunta sobre qué conocimientos presenta Tere en cuanto a fracciones, únicamente dos de los entrevistados (E1 y E5) identifican que dentro de la imagen conceptual de Tere no se encuentra el concepto de fracción equivalente. Y en particular, únicamente E5 manifiesta que Tere ve a la fracción en un todo continuo, en palabras del propio entrevistado: "[...] es solamente una cosa que se parte. Una unidad partida. Para mí, ella cree que es una figura sola, y se toma de esa figura sola única, se toma una parte" (E5, 2021). El resto de los entrevistados no identifican en la imagen conceptual de Tere que, según su respuesta y sus argumentos posteriores, la fracción es dada en un todo continuo y por ello descarta la F. En relación a esto, vemos que E1, pese a indicar que Tere no maneja el concepto de equivalencia, no logra identificar que la imagen que presenta Tere se relaciona con un todo continuo pues indica que: "[...] Si hubieran tres rectángulos pintados de la F, quizás ella si la hubiera elegido porque como que hubiera elegido, digamos, hubiera tomado cuatro de estos rectángulos que están en la F[...]" (E1, 2021).

Respecto al argumento de Tere para la figura E, vemos que únicamente E5 observa que la escolar cuenta veinticuatro partes, pero no logra ver cuatro filas para identificar a la fracción ¾, en este sentido, indica: "Me parece que es muy de lo concreto Tere. Esos niños están muy en lo concreto. Porque ella está contando 24. No está viendo que hay cuatro filas" (E5, 2021). Esto nos permite inferir que solo el E1 identifica que en la imagen conceptual de Tere el todo continuo tiene que estar partido exactamente en cuatro partes iguales. Los demás entrevistados no hacen hincapié en esta característica del conocimiento presentado por Tere, o como vemos en el caso de E3, indica erróneamente que efectivamente en la E no se representaron ¾.

En la Tabla 28 presentamos un resumen de lo expuesto en el análisis anterior. A partir de la información resumida podemos ver que todos los entrevistados identifican el procedimiento seguido por los escolares. En el caso del escolar Víctor, cuando se pide otras representaciones que identificaría, según su respuesta, como representante de ¾ vemos que solo dos de los entrevistados identifican una variedad de imágenes con particiones iguales y diferentes. Tres de los entrevistados identifican representaciones con una sola de las características presentes en la respuesta del escolar. Y otros dos incluyen representaciones discretas que no se pueden inferir a partir de la respuesta del escolar.

Finalmente, en el caso de Tere podemos ver que únicamente uno de los entrevistados logra identificar que, según los argumentos de Tere, el todo debe ser continuo y que dicho todo tiene que estar fraccionado exactamente en cuatro partes iguales.

Tabla 28: *Identificación de imagen conceptual*

	Procedimiento		**Víctor**	**Tere**	
Entrevistado	*Víctor*	*Tere*	*Encuentra variedad de representaciones según imagen de Víctor*	*El todo debe ser continuo*	*El todo fraccionado exactamente en 4 partes iguales*
E1	Si	Si	No (particiones diferentes)	No	No
E2	Si	Si	No (particiones iguales)	No	No
E3	Si	Si	Con error (agrega discreta)	No	No
E4	Si	Si	Si	No	No
E5	Si	Si	Si	Si	Si
E6	Si	Si	Con error (agrega discreta)	No	No
E7	Si	Si	No (particiones diferentes)	No	No

Fuente: Tabla de elaboración propia.

8.3.5 Conocimiento matemático presente en la entrevista

Tal como se señaló anteriormente la actividad que fue mostrada a los futuros maestros en la entrevista había sido previamente contestada por ellos en el cuestionario 1 (pregunta 9.1). En dicho cuestionario la pregunta se presentaba de forma cerrada, es decir con opciones de respuesta que los encuestados debían elegir. A partir de las respuestas dadas al cuestionario 1 en la pregunta 9.1 inferimos que en las respuestas de los estudiantes de la muestra predomina el concepto de "igualdad geométrica" de las partes al encontrar una cierta fracción. Asimismo, concluimos que varios estudiantes eligen como representantes de ¾ aquellas representaciones que no son discretas, reconociendo de este modo, dificultades con el tratamiento de dichas magnitudes tal como señalan Obando (2003) y León-Mantero et al. (2016). Estos hallazgos recogidos con la pregunta 9.1 del cuestionario 1 se analizan nuevamente, en este apartado, pero ahora tomando en cuenta los insumos de la entrevista 2.

En dicha entrevista también se logró explorar el conocimiento que muestran los futuros maestros en cuanto al tratamiento de representaciones equivalentes. Estas representaciones, como inferimos, a partir de los datos relevados en el cuestionario 1, acarrean varias dificultades.

Por otro lado, a lo largo de la entrevista se incorporaron otras preguntas que permitieron explorar la dificultad independencia de la forma geométrica en las particiones (Pazos, 2009;

Fandiño Pinilla, 2007; Obando, 2003). En referencia a esto, Obando (2003) indica que como el proceso de partición no se basa, en general, en la medida de la magnitud, se prioriza la visualización atendiendo a la congruencia geométrica entre las partes. Es importante resaltar que esta dificultad también fue reportada como predominante a partir de los hallazgos del cuestionario 1.

Lo antes mencionado nos permitió triangular los datos del cuestionario 1 con los aportes de las entrevistas y poder extraer conclusiones más robustas en cuanto a las dificultades mencionadas. En particular, a partir de las respuestas dadas en la entrevista podemos evidenciar la presencia de los indicadores D1, D2, D3, D5 y D7 definidos para la categoría *Definiciones, propiedades y sus fundamentos* (D) del subdominio KoT (ver sección 6.7). Estos indicadores están vinculados con las dificultades mencionadas anteriormente.

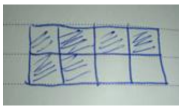
En primer lugar, a partir de las entrevistas podemos ver que únicamente E1, E5 y E7 indican inicialmente que la representación F se corresponde con ¾. En relación a esto E1, señala: "Tengo ocho rectángulos, y hay seis pintados. Y ahí me di cuenta en realidad que son fracciones equivalentes" (E1, 2021), E5 acuerda con el concepto de equivalencia mencionado por E1, mientras que E7 señala que si se calculan los ¾ de la representación F se obtendrían los seis rectángulos pintados.

Si bien E2 expresa inicialmente no estar de acuerdo con que F representa ¾, más adelante en la entrevista, indica que dicha representación sí se corresponde con ¾, en este sentido, señala: "[...]claro no es común ver representados tres cuartos de esta manera. Esta representación gráfica no es común verla. Pero es válida" (E2, 2021).

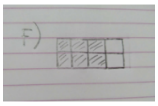
El resto de los entrevistados, E3, E4, y E6 indican inicialmente que la figura F no representa ¾. En este sentido, E3 expresa: "Tenés ocho partes pintadas... ocho no... Sí ocho partes en total. Pero solamente tenés seis pintadas. Entonces no se corresponde a los tres cuartos" (E3, 2021), E4 indica: "[...]no representan los tres cuartos de cada figura. Para poder representar tres cuartos de cada figura tenía que haber...dividido cada rectangulito en cuatro" (E4, 2021) y E6 señala: "Y la F también, es una fracción, pero no sería... en realidad me genera una duda porque están separaditos" (E6, 2021).

Luego de analizar las repuestas de los entrevistados observamos que únicamente E5 reconoce explícitamente cuál es la unidad de referencia en la figura F y cuando se le pregunta cuál es, señala: "El conjunto de rectangulitos" (E5, 2021). En el caso de E7, si bien no explicita que la unidad son los ocho rectangulitos, se puede inferir que la reconoce pues expresa que se deben calcular los ¾ de la figura F.

Los entrevistados E1 y E2 señalan que la unidad de referencia deberían ser los ocho rectangulitos juntos y cuando se les pide que dibujen lo que están pensando representan los ocho rectángulos en un todo continuo (ver Figura 36).



Entrevistado 1



Entrevistado 2

Figura 36: *Representación discreta*

En relación a la unidad de referencia que se presenta en la figura F, E6, indica que le genera dudas cuál es la unidad porque los cuadraditos están separados. E4 reconoce, de forma errónea, que la unidad de referencia son dos rectangulitos. Y E3 no especifica exactamente cuál es la unidad de referencia.

A partir de todo lo anterior, podemos evidenciar dificultades para el tratamiento de magnitudes discretas, tal como se había inferido a partir del cuestionario 1. En particular, recogemos evidencias sobre el indicador (D1) *Reconoce la unidad con la que se está trabajando en diferentes contextos* definido en el subdominio KoT. En este sentido, vemos que los futuros maestros, en general, presentan dificultades para reconocer que en el caso de la figura F la unidad son los ocho rectángulos. El hecho de que estos rectángulos estén separados genera dudas y algunos entrevistados tienden a "juntarlos" para llevar esta representación a un contexto más conocido como es el continuo.

Al analizar la respuesta de Álvaro (ver Figura 35) tres de los entrevistados presentan dudas o indican que es incorrecta la estrategia seguida por el personaje. Dicha estrategia implica tomar los subgrupos formados por dos rectángulos y considerarlos como una parte. En este caso, podemos ver que E4 indica: "Entonces ahí podés decir que de la figura esa están representados los tres cuartos, si los agrupás de a dos. Si lo agruparíamos de a tres tendríamos que decir que no. [...], tres no podría ser" (E4, 2021) a partir de esto, se le vuelve a consultar si F representa ¾, a lo que indica que no. En relación a este problema, E6 señala: "Lo que pasa que, no entiendo porqué marcó de a dos. Supongo que él quería llegar a tres cuartos. Pero no sé porqué las marcó de a dos" (E6, 2021). Mientras que, cuando se consulta a E1 si la estrategia seguida por Álvaro, es correcta señala: "En realidad para lo que se pide en la consigna no... Está confundiendo los conceptos" (E1, 2021).

A partir de lo anterior podemos inferir que tres de los estudiantes entrevistados presentan dificultades para partir una colección en subconjuntos (Obando, 2003). La presencia de esta dificultad nos permite recoger evidencias respecto al indicador (D3) *Reconoce las partes y el todo en contextos discretos* definido para el KoT.

Por otro lado, podemos ver que tres de los entrevistados (E1, E5 y E7) reconocen inicialmente que la representación E se corresponde con ¾ y no dudan a lo largo de la entrevista de la equivalencia. En el caso de E2, E3 y E4 dudan que la figura E represente ¾, esto se ve pues inicialmente responden que E se corresponden con ¾ o no, y luego, a partir de las justificaciones de los escolares van cambiando de opinión. Por ejemplo, a lo largo de la entrevista de E4, se observa claramente esta fluctuación:

> **Entrevistado 4:** En la E. Que la parte que está pintada de gris representaría los tres cuartos. Porque está dividido... viste que si vos contás las líneas está dividido, una línea, dos líneas, tres líneas, cuatro líneas. Que cada línea representa una parte de los tres cuartos, y que lo que pintaron fue tres cuartos, tres líneas de la figura
>
> ---
>
> [en el análisis de la respuesta de Tere]
>
> **Entrevistado 4:** [...]Y que la E sí, es correcto lo que está diciendo porque está dividido en 24 partes, y sólo hay pintadas 18, o sea que no representa los tres cuartos que le estaría pidiendo la maestra que se fije en cada figura.
>
> ---
>
> [en el análisis de la respuesta de Álvaro]
>
> **Investigador:** La E sí representa tres cuartos entonces
>
> **Entrevistado 4:** Claro, porque si nos ponemos a pensar que decíamos que tenían que estar en partes iguales, ahí están divididos en partes iguales.

En el caso de E6 directamente indica que la representación E no se corresponde con ¾, en este sentido, expresa "[...]E, si sería una fracción, pero no es la que plantea, y por eso está bien. No serían tres cuartos, pero si es una fracción" (E6, 2021). Más adelante en la entrevista E6 menciona que al parecer en E se está dando una fracción equivalente pero manifiesta "[..] en realidad, creo yo, hace mucho que no veo fracciones, pero en realidad, está en lo correcto, pero no es lo que se pide" (E6, 2021) expresando la idea de que si una fracción es equivalente a ¾ no representa al mismo número.

A partir de todo lo mencionado podemos inferir que cuatro de los estudiantes entrevistados presentan dificultades al reconocer representaciones equivalentes. Estos estudiantes al observar que la unidad ha sido fraccionada en veinticuatro partes de las cuales dieciocho están pintadas ven que el número representado es diferente. Esta dificultad nos permite inferir, en cuanto al KoT, que cuatro de los entrevistados no reconocen el vínculo cuantitativo, en contextos continuos, entre la parte y el todo (D2), así como tampoco, logran reconocer representaciones equivalentes cuando las unidades de referencia son distintas (D7).

En cuatro de las entrevistas se logra recoger evidencias sobre la dificultad de considerar un todo fraccionado en partes geométricamente iguales (Obando, 2003). En algunas entrevistas surge la discusión de si un rectángulo dividido por sus diagonales representa a ¾. En relación a esto, podemos ver que tres de los entrevistados (E2, E4 y E7) contestan que dicha representación no se corresponde con ¾, pues las partes no son iguales. En palabras de los propios entrevistados:

> **Entrevistado 2:** [...]esos triángulos no son iguales, no todos son iguales entre sí, sólo los que son ahí opuestos[...].
>
> ---
>
> **Entrevistado 4:** No porque no son iguales los dos lados de los costados no son iguales que los de la base. No son triángulos equiláteros todos-
>
> ---
>
> Entrevistado 7: [...]visualizando el rectángulo que está seleccionado, determinarían que no todos los triángulos son iguales

Únicamente el E5 reconoce que efectivamente el rectángulo dividido por sus diagonales representa ¾ y señala que los cuatro triángulos son iguales en superficie, en este sentido, expresa "En superficie sí. En forma no, pero en superficie sí" (E5, 2021).

En relación a la última dificultad podemos ver que tres de los entrevistados no manifiestan el reconocimiento del vínculo cuantitativo entre las partes y el todo (D2). En este sentido, se maneja la propiedad partes congruentes en un todo continuo siempre que las partes sean idénticas geométricamente (D5).

En la Tabla 29 se puede apreciar las repuesta que los futuros maestros dieron a la pregunta 9.1 del cuestionario 1 y tres columnas más que nos muestran un resumen de la información antes analizada. En las últimas tres columnas se muestra si los futuros maestros en la entrevista reconocieron a la figura E o F como representante de ¾ o si presentaron la dificultad "congruencia geométrica de las partes". Cabe destacar que en cuanto a la dificultad "congruencia geométrica de las partes" algunos entrevistados aparecen con "---" pues esto indica que no surgió la pregunta en su entrevista. A partir de dicha tabla, podemos ver que los entrevistados E5 y E6 no evolucionan en cuanto a sus respuestas a la pregunta 9.1 luego de la entrevista, ya sea porque contestaron correctamente al ítem 9.1 como es el caso de E5 o porque habiendo optado por una opción incorrecta no agregaron nuevas opciones a su respuesta inicial. Mientras que los entrevistados E2, E3 y E4 presentan una pequeña evolución en su razonamiento pues dudan de algunas representaciones que anteriormente no estaban incluidas en la respuesta que habían dado al ítem 9.1. Finalmente, vemos que los entrevistados E1 y E7 presentan una evolución significativa en sus respuestas pues agregan opciones que no habían considerado anteriormente.

Tabla 29: *Respuestas a la pregunta 9.1 cuestionario 1 y aportes de la entrevista*

	Cuestionario 1	**Entrevista**		
Entrevistado	Respuesta al ítem 9.1	Reconoce como representante de ¾ a la figura F	Reconoce como representante de ¾ a la figura E	Presenta la dificultad congruencia geométrica de las partes
E1	Incorrecta	Si	Si	----
E2	Incorrecta	Duda	Duda	Si
E3	Incorrecta	No	Duda	----
E4	Incorrecta	No	Duda	Si
E5	Correcta	Si	Si	No
E6	Incorrecta	No	No	----
E7	Incorrecta	Si	Si	Si

Fuente: Tabla de elaboración propia.

8.4 Conclusiones finales

En las secciones anteriores se analizaron los datos obtenidos a la luz del marco teórico adoptado. En particular, el análisis realizado junto a los insumos teóricos que se presentaron en este trabajo nos permitieron dar respuesta a los objetivos propuestos. Es importante destacar que por ser este un estudio de casos los datos relevados no se pueden generalizar.

El primer objetivo que nos propusimos en este trabajo era el de *Identificar el conocimiento matemático que poseen los estudiantes avanzados del IINN, sobre el concepto de fracción como relación parte-todo*. En relación a este objetivo se infiere, que en general, en el concepto que los futuros maestros manejan de fracción predomina la idea de la fracción como conteo de partes, es decir la fracción es vista como partes pintadas sobre total de partes entre las que se ha dividido la unidad (Pazos, 2009).

Por otro lado, se puede ver a partir de los dos instrumentos de recogida de información que los futuros maestros presentan dificultades para reconocer la unidad con que se está trabajando cuando las representaciones son discretas. El hecho de que las partes se presenten separadas genera conflictos en la interpretación de la fracción (Obando, 2003) y algunos estudiantes tienden a “juntar” las partes para llevar esta representación a un contexto más conocido como es el continuo. En relación a lo antes dicho se puede agregar que los estudiantes presentan dificultades para partir una colección discreta en subconjuntos (Obando, 2003). La presencia de estas dificultades nos permite inferir que los futuros maestros presentan dificultades para reconocer las partes y el todo en contextos discretos.

En el cuestionario 1 se pudo apreciar que la gran mayoría de los estudiantes encuestados logran establecer el vínculo cuantitativo en contextos continuos para fracciones menores a la unidad entre las partes y el todo. Mientras que en las entrevistas, este conocimiento se vio afectado cuando el vínculo cuantitativo se debía establecer en representaciones equivalentes de una cierta fracción. En ese caso predominó entre los entrevistados la idea de conteo de partes pintadas sobre total de partes en que se divido la unidad como ya se mencionó. Si bien a partir de los datos recogidos en el cuestionario 1 inferimos que los encuestados demostraban poseer conocimiento sobre la propiedad partes congruentes en representaciones del tipo continuas, en lo datos relevados en las entrevistas, surgieron algunos problemas con esta propiedad. En este sentido, algunos de los entrevistados manifestaron la idea que implica reconocer partes congruentes, siempre que las partes sean idénticas geométricamente, sin importar la superficie que ocupan.

En cuanto a los conocimientos que implican reconstruir a la unidad a partir de una parte menor que ella se logró ver que resulta, a los futuros maestros, más difícil reconstruirla cuando el todo es continuo que cuando es discreto. Mientras que cuando se solicita a los estudiantes reconstruir la unidad a partir de una parte mayor que ella resulta complejo a los estudiantes tanto si consideramos contextos continuos o discretos (Pazos, 2009).

Al solicitar a los estudiantes aplicar el procedimiento de encontrar una fracción a partir de otra fracción, pudimos concluir que se presentan mayores dificultades cuando la unidad de referencia es discreta que cuando es continua. Además, en este tipo de pregunta es frecuente que para obtener una fracción de otra fracción de la unidad, se cometa el error de considerar como unidad de referencia el conjunto dado en la pregunta, aunque se les indique que éste es una fracción de la unidad (Pazos, 2009).

También, a partir del cuestionario 1, se pudo concluir que los estudiantes logran reconocer a un segmento como unidad y en particular usarlo para encontrar longitudes de otros segmentos. En relación a esto último, vimos que los estudiantes no presentan mayores dificultades en el trabajo con fracciones mayores a la unidad, siempre que la magnitud en juego sea la longitud.

Al observar los datos obtenidos en el cuestionario 1 y en las entrevistas inferimos dificultades para reconocer representaciones equivalentes. A partir del cuestionario 1, vemos que los estudiantes encuestados presentan dificultades al reconocer representaciones equivalentes cuando la unidad de referencia es la misma pero las partes son diferentes en su forma geométrica (Pazos, 2009; Fandiño Pinilla, 2007 y Obando, 2003). Además, se evidencian tanto en el cuestionario 1 como en la entrevista dificultades al reconocer representaciones que muestran la misma relación superficie pintada-superficie total cuando la relación está dada en unidades geométricamente distintas. La equivalencia de fracciones está ligada a la congruencia de las partes en que se ha dividido la unidad (Obando, 2003). A esta dificultad podemos agregar que algunos estudiantes identifican el término equivalencia con igualdad de forma de la unidad o también, con la relación número de partes pintadas sobre número de partes totales en que se ha dividido la unidad sin importar si estas partes son congruentes (Pazos, 2009).

En relación al conocimiento matemático, inferimos que los estudiantes que contestaron al cuestionario 1 presentan una notoria dificultad en el reconocimiento del “todo” cuando las fracciones involucradas son mayores a la unidad (Pazos, 2009) pese a que dicha unidad sea explicitada. Tal como indica Pazos (2009), podemos ver que dichas fracciones resultan menos intuitivas para trabajar la relación parte-todo y por tanto, al momento de resolver problemas que las involucran, los estudiantes, tienden a cometer errores con mayor frecuencia.

En resumen, podemos ver que el conocimiento matemático que los futuros maestros presentan en relación a la fracción como relación parte –todo se encuentra en desarrollo. En general, el concepto de fracción que manifiestan los futuros maestros se presenta fuertemente ligado a contextos del tipo continuo y a fracciones menores a la unidad. Asimismo, no logran trabajar con seguridad representaciones que estén dadas en contextos discretos y tampoco el concepto de equivalencia.

El segundo objetivo que nos propusimos en este trabajo era el de *Describir el conocimiento didáctico que poseen los estudiantes avanzados del IINN, en relación a los errores que cometen los estudiantes escolares al aplicar el concepto de fracción como relación parte-todo*.

Tal como se pudo ver, en los datos relevados en las entrevistas, la dificultad que resultó más sencilla de reconocer tanto en el análisis a priori de la actividad matemática como en el análisis de respuestas de escolares es la que implica no reconocer partes congruentes. En particular, dicha dificultad es reconocida explícitamente por la gran mayoría de los entrevistados. Asimismo, podemos ver que la dificultad de considerar que una parte puede estar dividida en otras partes (fracciones equivalentes) no es reconocida por los entrevistados, únicamente tres de ellos mencionan alguna idea relacionada con fracciones equivalente a partir del análisis de las respuestas de los escolares. Finalmente, la dificultad que se presenta al trabajar con conjuntos discretos que implica considerar un grupo de partes como una parte es reconocida únicamente por uno de los entrevistados, mientras que otros dos mencionan una cierta dificultad pero que no parte del análisis del argumento brindado en las respuestas de los escolares. A partir de todo lo dicho, inferimos un conocimiento escaso de los errores que cometen los estudiantes escolares al aplicar el concepto de fracción.

El tercer objetivo que nos propusimos en este trabajo era el de *Indagar si los futuros maestros reconocen, en producciones escritas de estudiantes escolares, diferentes imágenes conceptuales que se ponen en juego al resolver una actividad matemática que involucre el concepto fracción como parte-todo.*

A partir de la información recogida, podemos ver que todos los entrevistados logran identificar el procedimiento seguido por los escolares a partir de sus respuestas. Cuando se solicita a los entrevistados pensar en representaciones que den cuenta de la imagen conceptual que maneja un cierto escolar, se puede inferir a partir de su respuesta, que solo dos de los entrevistados identifican una variedad de imágenes con particiones iguales y diferentes. Tres de los entrevistados identifican representaciones con una sola de las características presentes en la respuesta del escolar. Y otros dos, incluyen representaciones que no se pueden inferir a partir de la respuesta del escolar.

Por otro lado, cuando se presenta la respuesta de un escolar que muestra en su imagen conceptual la idea de que el todo debe ser continuo y que dicho todo tiene que estar fraccionado exactamente en cuatro partes iguales, vimos que únicamente uno de los entrevistados logra identificar dicha imagen en la respuesta.

En consecuencia, al reconocer en producciones escritas de estudiantes escolares diferentes imágenes del concepto de fracción, vemos que los futuros maestros reconocen con solvencia los procedimientos aplicados por lo escolares. Pero en general, no logran reconocer en los argumentos de los escolares otros elementos, diferentes a procedimientos, que les permita adelantar posibles representaciones o conceptos que se pueden concluir a partir del análisis de los argumentos brindados.

El cuarto objetivo que nos propusimos en este trabajo era el de *Indagar el conocimiento que poseen los futuros maestros sobre las estrategias que ponen en juego los estudiantes escolares al enfrentarse a una actividad que involucra el concepto de fracción en su interpretación parte-todo.*

A lo largo del análisis realizado en las entrevistas podemos ver que la gran mayoría de los entrevistados conocen la estrategia que implica observar en qué figuras hay cuatro particiones de las cuales tres están pintadas (estrategia 1). Mientras que una minoría, reconoce las estrategias: observar figuras en que hay cuatro particiones iguales de las cuales tres están pintadas (estrategia 2), observar a una parte dividida en varias partes y considerarla como una sola (estrategia 4), descartar opciones por no ser familiares al contexto escolar (estrategia 6) o elegir las figuras por familiaridad en el contexto escolar (estrategia 5). Y ninguno de los entrevistados reconoce como estrategia agrupar a un conjunto de objetos y considerarlos como una parte (estrategia 3).

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, concluimos que, los futuros maestros de la muestra, conocen de forma escasa las estrategias que ponen en juego los estudiantes escolares al enfrentarse a una actividad que implica el uso de las fracciones. En general, tienden a reconocer la estrategia que se vinculan con la dificultad de no tener en cuenta la equidad de las partes por sobre todas las demás.

Finalmente, queremos destacar que este trabajo deja abierta la posibilidad de explorar otros de los subdominios del MTSK, que no fueron explorados en esta investigación.

8.5 Limitaciones de la investigación

A continuación, exponemos las principales limitaciones que presentó el trabajo en el transcurso de la investigación.

El hecho de haberse realizado este estudio en los años 2020-2021 donde se atravesó una pandemia mundial condicionó la selección de la muestra. En particular, el centro de estudio seleccionado para la investigación mantuvo sus cursos en formato virtual durante prácticamente todo el período, lo que dificultó la comunicación con los estudiantes. Estos últimos, decidieron voluntariamente participar de la investigación y por tanto, los resultados obtenidos no se pueden generalizar.

Finalmente, para dar respuesta a los objetivos de investigación nos basamos en el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática, centrándonos exclusivamente en los subdominios KoT y KFLM. Esto último limita el análisis de los resultados pues excluimos algunos hallazgos que podrían estar vinculados a otros de los subdominios definidos en el modelo.

8.6 Futuras investigaciones

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos podemos sugerir algunas líneas de investigación que se derivan de este trabajo.

A partir de los resultados obtenidos sería importante profundizar en el conocimiento didáctico que poseen los estudiantes de magisterio, teniendo en cuenta para ellos otros de los subdominios del modelo MTSK. Esto permitiría interpretar la problemática planteada de una forma más amplia y tener una visión más robusta sobre el conocimiento didáctico de los futuros maestros.

Por otro lado, vimos que los futuros maestros presentan principalmente dificultades en el tratamiento de magnitudes discretas, en el manejo de fracciones mayores que la unidad y en el trabajo con representaciones equivalentes. Es por ello que se podría sugerir una línea de investigación que permita profundizar en las dificultades señaladas con futuros maestros desde un enfoque cualitativo.

Finalmente, esta investigación aporta una herramienta poderosa como es el cuestionario que fue aplicado para determinar el Conocimiento Matemático (ver anexo 1.3) que presentaban lo futuros maestros. Esta herramienta podría ser usada por futuros investigadores desde diferentes ópticas como podría ser la puesta en práctica de una secuencia didáctica y su posterior análisis.

Referencias Bibliográficas

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo Yáñez, J., Climent Rodríguez, N., Contreras González, L., Escudero, D., . . . Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. *Actas del VII CIBEM (Congreso Iberoamericano de Educación Matemática)*, (págs. 5063-5069). Montevideo, Uruguay.

Ball, D. (2000). Bridging practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241-247. Recuperado el 6 de enero de 2020, de https://doi.org/10.1177/0022487100051003013

Ball, D. L. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics? *Secretary's Summit on Mathematics, US Department of Education.*, 1-9. Recuperado el 5 de enero de 2020, de http://jwilson.coe.uga.edu/situations/Framework%20Folder/Framework.Jan08/articles/Ball2003Math%20Summit.pdf

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407. Recuperado el 4 de enero de 2020, de https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). *Rational number concepts. Acquisition of mathematics concepts and processes.* Nueva York: Academic Press. Recuperado el 26 de enero de 2021, de https://www.researchgate.net/profile/Edward_Silver2/publication/258510439_Rational_number_concepts/links/57598dc808aed884620b0d82.pdf

Brusa, L., & Corujo, M. (2014). La fracción, ¿qué dificultades encierra? . *Quehacer Educativo* , 16-22.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., . . . Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 1-18. doi:10.1080/14794802.2018.1479981

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L., & Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics, Springer, 92*(1), 129-146. doi:10.1007/s10649-015-9673-4

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). DRAWING ON A THEORETICAL MODEL TO STUDY STUDENTS' UNDERSTANDINGS OF FRACTIONS. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 293-316. Recuperado el 29 de enero de 2020, de www.jstor.org/stable/27822662

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (págs. 1-15). Zaragoza : Boletin del SI-IDM.

Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). Fracciones y números racionales positivos. En E. Cid, J. D. Godino, & C. Batanero, *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros* (págs. 311-348). Granada: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Consejo de educación inicial y primaria (CEIP). (2013). Programa de educación inicial y primaria, (3era edición). Recuperado el 21 de 01 de 2020, de http://www.ceip.edu.uy/documentos/normativa/programaescolar/ProgramaEscolar_14-6.pdf

Consejo de Formación en Educación (CFE). (2007). *Sistema único nacional de formación docente 2008, documento final.* Recuperado el 21 de 01 de 2020, de http://iinn.cfe.edu.uy/images/PDF/Estudiantes/Planes/sundfd_2008.pdf

Consejo de formación en educación (CFE). (2019). *Informe de egresos del CFE, análisis de su evolución y principales características (2000-2017).* Obtenido de http://www.cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/publicaciones/estadisticas/informe_egresos_cfe2000-201

Contreras, L., Montes, M., Climent, N., & Carrillo, J. (1 de enero de 2017). *Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas.* Recuperado el 6 de enero de 2020, de (In-press) https://www.researchgate.net/publication/313824049_Introduccion_al_modelo_MTSK_origen_e_investigaciones_realizadas

Escudero-Ávila, D., Climent, N., & Vasco, D. (2016). Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KLFM). En J. Carrillo, L. Contreras, & M. Montes (Ed.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (págs. 42-48). Huelva: CGSE.

Escudero-Domínguez, A., Joglar, N., Correa, D., & Reyes, A. (2016). Rtrospectiva de las investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo, L. Contreras, & M. Montes (Ed.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Acta de las II Jornadas del Seminario de investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva.* (págs. 69-86). Huelva: CGSE.

Fandiño Pinilla, M. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, *7*, págs. 23-45.

Fernández, S., & Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. *En Moreno, Mar; Carrillo, José; Estrada, Assumpta (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV.*, 291-301.

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (págs. 30-34). Huelva: CGSE.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C., & Liñán, M. M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 204-221.

Flores-Medrano, E., Sosa, L., & Ribeiro, C. (2016). Tránsito del MKT al MTSK. *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (págs. 7-11). Huelva: CGSE.

Gairín Sallán, J., & Sancho Rocher, J. (2002). *Números y Algoritmos.* Madrid: Síntesis.

Gallardo, J., González, J., & Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 355-382.

González Retana, J. F., & Eudave Muñoz, D. (2018). Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales. *Educación Matemática, 30*(2), 106-139. doi:10.248444/EM3002.05

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta edición ed.). Mexico D.F.: Mc Graw Hill.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and meaduring teachers topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathemathics education, 39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406. Recuperado el 6 de enero de 2020, de https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Ivars, P., Buforn, A., & Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente". *Acta Scientiae, 18*(4), 48-66.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Madrid, M., & Casas, J. (2016). Errores de los estudiantes a maestro cuando trabajan con fracciones. *XVI Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ni más ni menos* (págs. 1-9). Universidad de Cádiz: SAEM Thales.

Liñan, M., Contreras, L., & Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C.Contreras, & M. Montes (Ed.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornada del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (págs. 12-20). Huelva: CGSE.

Llinares, S., & Sánchez, M. (1997). *Matemáticas: cultura y aprendizaje. Fracciones, N°4.* Madrid, España : Síntesis.

Marcelo, C., Parrilla, A., Mingorance, P., Estebaranz, A., Sánchez, M., & Llinares, S. (1991). *El estudio de caso en la formación del profesorado y la investigación didáctica.* Sevilla , España : Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Martínez, C., & Lascano, M. (2001). Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. *Revista EMA*, *6*(2), 159-179.

Mendoza, L. E. (2008). La noción de obstáculo epistemológico en Gastón Bachelard. *Espéculo: Revista de Estudios Literarios, 38*, 25-30.

Montes, M., & Climent, N. (2016). Conocimiento de la estructura matemática (KSM). En J. Carrillo, L. Contreras, & M. Montes (Ed.), *REflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Sminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la universidad de Huelva* (págs. 21-29). Huelva: CGSE.

Montes, M., Contreras, L. C., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XXI*, (págs. 403-410). Bilbao, España: Universidad del País Vasco.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los número racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 157-182.

Osin, L. (1966). *Indtroducción al análisis matemático.* Buenos Aires: Kapelusz.

Pazos, L. (2009). Las fracciones son un problema . *Quehacer educativo* , 40-45.

Poveda, M. (s.f). *+ Problemáticas escolares con el número fraccionario.* Recuperado el 19 de 02 de 2020, de Fundación Promigas : https://drive.google.com/drive/u/0/folders/1VnYbkATXcIt-YsEbsKgXou4C_phhIJDn

Pruzzo de Di Pego, V. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza? *Revista Pilquen*(8), 1-14.

Reyes Camacho, A. M., & Sosa Guerrero, L. (2019). Conocimietno especializado del profesor de primaria en formación: un estudio de caso de la enseñanza de la noción de razón. *Quadrante*, *28*(2), 100-124.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, & P. Gómez (Ed.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (págs. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rojas, N. (2014). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemática: un estudio de casos (tesis de doctorado). Granada, Universidad de Granada.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. Obtenido de https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. (2005). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform . *Revista de currículum y formación del profesorado, 9*(2), 1-30.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Imagen conceptual y definición del concepto en Matemáticas con especial referencia a los límites y la continuidad. *Educational Studies in Mathematics*, 151-169.

1 Anexos

1.1 Anexo: Entrevista a Expertos

Tabla 30: *Entrevista a expertos*

PARTE A

Preguntas generales sobre la carrera Maestro de Educación Primaria (MEP)

(1) ¿Cuál es la carga horaria total de matemática en la carrera de MEP?

(1.1) ¿Consideras que es suficiente?

(2) En la escuela, ¿sabes qué porcentaje de los cursos se espera se dediquen a la enseñanza y aprendizaje de la matemática?

(3) ¿Poseen los futuros maestros formación específica en el área de didáctica de matemática?

(3.1) ¿Quién está a cargo de la formación didáctica de los futuros maestros?

(3.2) ¿Qué opinión te merece la formación didáctica de los futuros maestros?

PARTE B

Preguntas relacionadas con el concepto de fracción

(1) ¿En qué año de la carrera se trabaja el concepto de número racional?

(1.1) En particular, ¿se trabajan los diferentes significados de la fracción?

(1.2) ¿Cuáles significados se trabajan con mayor profundidad? ¿por qué?

(2) ¿Cómo se enseña la relación parte-todo en el instituto?

(2.1) ¿Definen la relación parte-todo?

(2.3.1) Si la respuesta es sí, ¿qué definición se dá sobre el concepto?

(2.2) ¿Qué bibliografía usan ustedes y recomiendan a los estudiantes para abordar este concepto?

(2.3) ¿Cuál representación (continua o discreta) de la relación parte todo es la más usada en el instituto?

(2.3.1) ¿Y en la escuela?

1.1.1 Respuestas Dadas a la Entrevista por Parte de los Expertos y análisis

1.1.1.1 Extracto de las respuestas

Pregunta	Respuesta
1	**Experto 1**: El tema es que, a mí me parece que no, que no es suficiente. También entiendo de que las matemáticas en magisterio es una materia general, o sea, es una materia más de todas las que tienen. Entonces el tema es, ellos tienen en primero 12 materias, en segundo, 12 materias, o sea. Es brutal la carga horaria que tienen en cuanto a la cantidad de materias. Entonces para mí el tema es plantear la carga horaria, por un lado, me parece que se necesita más, y por otro lado los contenidos. Que ahí es otro tema bien gordo de magisterio ¿no? ¿Qué es lo que tiene que saber un maestro?, y bueno. Y ahí a mí se me hace difícil pensar si son más horas las que se necesitan, o sacar contenidos y trabajar de otra manera la matemática de magisterio. ¿Qué matemática necesita un maestro? Porque para mí lo que tenemos que tener claro es que el maestro es generalista. No va a ser un profesor de matemática. Entonces, como ahí hay que tener muy claro porque generalmente los que damos clase somos profesores de matemática. Y venimos con una cabeza formados para dar clase de matemática en bachillerato, o en facultad. Pero en magisterio como que es otra cosa, que me parece que es un debe que todavía tenemos. Pero si me decís si son pocas horas, sí son pocas horas. ¿Cuántas más se necesitarían? No sé. Hubo un plan en el 96, en el INECO, que era un plan nuevo, que ahí tenían matemática todos los días 45 minutos. O sea que eran cinco horas semanales.
	Experto 2: Yo creo dos cosas. Que en la carrera del plan 2008 lo que falta es didáctica de la matemática. O una materia más amplia que fuera "educación matemática". Con didáctica yo ya me quedaría conforme. Donde entre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Obviamente no es. Pero yo creo que más horas solo de contenidos matemáticos no es la solución. Que la solución sería más un enfoque de la enseñanza de la matemática a través de una forma de mirar la matemática distinta. O sea, yo no extendería a matemática I y matemática II como tal. Sino que, para mi gusto, el nombre de la materia tendría que reflejar que ahí sería enseñanza de la matemática o didáctica de la matemática. Donde el objeto es el análisis de los asuntos matemáticos, pero desde el punto de vista de la enseñanza y del aprendizaje. **Investigadora**: Vos dijiste que "la solución sería..." ¿La solución ante que dificultad que vos ves en la carrera? **Experto 2**: Es que para mí la carga horaria del recorrido matemático del alumno, es muy exigua frente a la responsabilidad profesional. En su profesión los maestros, se supone, y creo que así lo hacen la mayoría, todos los días deberían trabajar un rato en matemática y un rato en lengua. Entonces, eso debería estar de alguna manera reflejado en su formación inicial. Ese trayecto que ellos van a tener de su formación desde nivel inicial hasta sexto, porque el título es único, ellos deberían de salir empoderados de un tratamiento sobre cómo hacer para enfrentar esas responsabilidades. Entonces ahí no es solo matemática, sino una mirada distinta de la matemática.
3	**Experto 1**: No. En el plan 2005 hubo una asignatura que se llamaba "matemática y su enseñanza". Y estaba en primer año y en segundo. Enfocada en primer año en contenido, 50 y 50. Después 40 en contenido y 60 en didáctica. Y después teníamos un taller de tercer año que era de didáctica. Pero eso en el plan 2008 desapareció. Y lo que quedó en el plan 2008 es un taller

	de apoyo a la práctica en tercer año y el encargado de la didáctica de matemática es el director de la escuela en segundo año. En segundo año las chicas empiezan con la práctica tres veces por semana. Y tienen un director que es su profesor de didáctica en general. Y en segundo año trabajan la didáctica de la matemática y la didáctica de la lengua. Y en tercer año el director trabaja con las chicas la didáctica de las ciencias naturales y las ciencias sociales. Pero es el director el que forma en la escuela misma, o en sus horas que tiene en el Instituto, que tiene tres horas semanales, o sea unas 90 horas anuales, y ahí es donde trabaja la didáctica general, la didáctica de la matemática y la didáctica de la lengua. Que pare mí eso sí es muy poco. **Investigadora:** ¿La opinión que a vos te merece la formación en didáctica? **Experto 1:** Es muy poca y no está, o sea, no quiero hablar mal de los directores obviamente porque me merecen todo mi respeto, pero me parece que un director de escuela bastante ya tiene con su gestión, además se le agrega el tiempo de la formación didáctica en general, y aparte la formación didáctica en cada una de las asignaturas. Para mí la matemática es como una ciencia. Como que hay que profundizarla o estudiarla aparte, y no me parece que el director esté formado para dar didáctica de la matemática. Obviamente lo ideal sería la dupla, profesor de instituto de matemática, y la directora, y ahí trabajar conjuntamente tanto la didáctica como los contenidos. Pero eso es un sueño que todavía no se ha logrado. Pero me parece que es mucho para el director. Recae mucho en el director de escuela.
	Experto 2: Ese es un taller de profundización en matemática. Que obviamente un taller de profundización en matemática con una carga en un semestre, de 26 horas es totalmente insuficiente colocada en un tercer año. Pero además no tienen las didácticas específicas. Y eso es una falencia que se viene cargando. El último programa que tuvo didáctica de la matemática fue el plan 2005. En el plan 2005 si estaba más equilibrado esto que yo te digo, pero ni siquiera se llegó a completar una generación. Fijate que era de cuatro años el plan 2005. El plan 2008 ya lo cambian. Es decir que hay una generación de plan 2005 que terminan ya con un cambio de programa. Y eso ha sido una carencia muy grande. Porque la didáctica de la matemática queda responsablemente, solamente ubicada en la didáctica de segundo año. Que es una didáctica general, que es la Directora de la escuela de práctica, que tiene como responsabilidad en segundo año trabajar, creo que didáctica de la matemática y didáctica de las ciencias sociales. Y creo que en tercero trabajan didáctica de la lengua y didáctica de las ciencias naturales. Si no es así es combinado, pero, lengua y matemática están en segundo y tercero respectivamente. Y las otras dos también tienen la responsabilidad de enseñar la didáctica del arte. Entonces, un sólo profesional no tiene la capacidad, por más experto que sea, de tener bajo su ala la responsabilidad de formar en todas las didácticas específicas. Porque el objeto de conocimiento cambia de base. No es lo mismo enseñar matemática que enseñar lengua ni ciencias sociales. Y es el único año, en segundo, como responsabilidad en el dictado por parte de las practicantes en las clases, es en segundo año. Cuando solamente se ha tenido en su formación profesional, sólo han tenido un año

	de matemática, y nada de didáctica. Si el profesor de matemática I no se hace cargo de introducir algunos asuntos que pasan en la escuela, el alumno de magisterio cae en un segundo año en una práctica con un desconocimiento total. Solo porta su historia. Su historia como alumno. Y eso es re jodido. Porque una cosa es, cómo pensamos que aprendimos, y otra es realmente cómo aprendimos. Y esa distancia es insalvable si no te la hacen pensar. **Investigadora:** ¿Entonces cuál es tu opinión respecto a que no tengan didáctica específica? **Experto 2:** Es una carencia muy grande en la formación inicial de maestros.

1.1.1.2 Entrevista 1 completa

Código: I: Investigadora – Ex 1: experto 1

Investigadora: Bueno, la primera pregunta Inés, que te hago es: ¿Cuál es la carga horaria total de Matemática en la carrera de Magisterio?

Experto 1: Bien. En primero año tienen cuatro horas semanales. Suponiendo que son treinta semanas, serían unas 120 horas anuales en primer año. En segundo año, tienen tres horas semanales, estamos hablando de horas de 45 minutos en algunos turnos, y de 40 minutos en otros turnos. El turno vespertino y el turno nocturno tienen horas de 40 minutos. Y el matutino tiene horas de 45 minutos. Entonces en primero dijimos 120 horas anuales. En segundo, tres horas, suponiendo que son 30 semanas, eso daría 90 horas. Y después en tercero hay un taller de apoyo a la práctica docente, que en general los trabajan maestros, y trabajan con problemas de la escuela directamente. O sea, no es con contenidos matemáticos. Y ahí son 3 horas semanales. Así que estamos haciendo un total de 240 horas.

I: Y para vos ¿es suficiente la carga horaria que está destinada en toda la currícula de magisterio a la enseñanza de la matemática?

Ex 1: El tema es que, a mí me parece que no, que no es suficiente. También entiendo de que las matemáticas en magisterio es una materia general, ósea, es una materia más de todas las que tienen. Entonces el tema es, ellos tienen en primero 12 materias, en segundo, 12 materias, o sea. Es brutal la carga horaria que tienen en cuanto a la cantidad de materias. Entonces para mí el tema es plantear la carga horaria, por un lado, me parece que se necesita más, y por otro lado los contenidos. Que ahí es otro tema bien gordo de magisterio ¿no? ¿Qué es lo que tiene que saber un maestro?, y bueno. Y ahí a mí se me hace difícil pensar si son más horas las que se necesitan, o sacar contenidos y trabajar de otra manera la matemática de magisterio. ¿Qué matemática necesita un maestro? Porque para mí lo que tenemos que tener claro es que el maestro es generalista. No va a ser un profesor de matemática. Entonces, como ahí hay que tener muy claro porque generalmente los que damos clase somos profesores de matemática. Y venimos con una cabeza formados para dar clase de matemática en bachillerato, o en facultad. Pero en magisterio como que es otra cosa, que me parece que es un debe que todavía tenemos. Pero si me decís si son pocas horas, sí son pocas horas. ¿Cuántas más se necesitarían? No sé. Hubo un plan en el 96, en el INECO, que era un plan nuevo, que ahí tenían matemática todos los días 45 minutos. O sea que eran cinco horas semanales.

I: ¿Y ahí funcionaba mejor?

Ex 1: Nunca, como todas las cosas en este país, no se evaluaron. Porque fue una reforma, que hizo Rama, se aplicó en el Instituto de la Costa, el INECO, se trabajó dos años, o tres años. Y los resultados para mí fueron buenos, aunque nunca se evaluaron. Pero claro, vino otro gobierno, otra administración, se borró. Y ahí tenían matemática todos los días. Eso sería bueno investigar o averiguar.

I: Ese seguimiento continuo todos los días en ese plan era bueno, digamos.

Ex 1: Si. Sí, sí. Y en primero, en segundo, y no se si no era en tercero también. Si querés averiguar eso, eso sería bueno a lo mejor.

I: ¿El plan se llama?

Ex 1: Ay. INECO era el Instituto donde se trabajó. O sea, el Instituto de la Costa. Y es el plan 96 o 97. EL plan de Rama. Que se hizo en formación docente. Es un plan que ya te digo, lo trabajó Laura Dodino mucho tiempo. Y ella siempre dijo como que fue muy bueno lo de la matemática.

I: Por otro lado. Yéndonos como más a la escuela. ¿Vos tenés conocimiento de qué porcentaje se espera, dedique el maestro a la enseñanza de la matemática? Si existe eso, o queda libre al maestro.

Ex 1: No. Me parece que no existe. No tengo mucho elemento. Lo que si la realidad me dice que se trabaja bastante en matemática. Las chicas en la práctica te cuentan que lo que dan es matemática. Matemática y lengua como son las cosas que más se trabajan en la escuela. Por lo menos hasta hace unos años. Obviamente ahora hay mucha cosa de plástica, de arte, el inglés, la gimnasia, la música. Como que hay más actividades en la escuela, y se está trabajando menos. Se está trabajando menos en todos los contenidos. Pero con todo, me parece que matemática y lengua como que siguen en la cabeza en el tiempo diario del maestro en el aula. Me da la sensación. No tengo ningún número. Pero me da sensación que se sigue trabajando más matemática.

I: La formación específica en el área de la didáctica de la matemática en la carrera de magisterio ¿existe?

Ex 1: No. En el plan 2005 hubo una asignatura que se llamaba "matemática y su enseñanza". Y estaba en primer año y en segundo. Enfocada en primer año en contenido, 50 y 50. Después 40 en contenido y 60 en didáctica. Y después teníamos un taller de tercer año que era de didáctica. Pero eso en el plan 2008 desapareció. Y lo que quedó en el plan 2008 es un taller de apoyo a la práctica en tercer año y el encargado de la didáctica de matemática es el director de la escuela en segundo año. En segundo año las chicas empiezan con la práctica tres veces por semana. Y tienen un director que es su profesor de didáctica en general. Y en segundo año trabajan la didáctica de la matemática y la didáctica de la lengua. Y en tercer año el director trabaja con las chicas la didáctica de las ciencias naturales y las ciencias sociales. Pero es el director el que forma en la escuela misma, o en sus horas que tiene en el Instituto, que tiene tres horas semanales, o sea unas 90 horas anuales, y ahí es donde trabaja la didáctica general, la didáctica de la matemática y la didáctica de la lengua. Que pare mí eso sí es muy poco.

I: ¿La opinión que a vos te merece la formación en didáctica?

Ex 1: Es muy poca y no está, o sea, no quiero hablar mal de los directores obviamente porque me merecen todo mi respeto, pero me parece que un director de escuela bastante ya tiene con su gestión, además se le agrega el tiempo de la formación didáctica en general, y aparte la formación didáctica en cada una de las asignaturas. Para mí la matemática es como una ciencia. Como que hay que profundizarla o estudiarla aparte, y no me parece que el director esté formado para dar didáctica de la matemática. Obviamente lo ideal sería la dupla, profesor de instituto de matemática, y la directora, y ahí trabajar conjuntamente tanto la didáctica como los contenidos. Pero eso es un sueño que todavía no se ha logrado. Pero me parece que es mucho para el director. Recae mucho en el director de escuela.

I: La segunda parte de esta entrevista refiere al concepto que se planteó en los objetivos de esta investigación. En particular la primera pregunta que te hago es: ¿En qué año de la carrera se trabaja el concepto de número racional? O, si está repartido entre primero y segundo, o solamente se focaliza en uno o en el taller.

Ex 1: En el plan que tenemos actualmente, racionales está en matemática II. En matemática I ni se toca. Como que no se puede hablar, eso compartimentado que están los contenidos en nuestra enseñanza, que está como prohibido hablar de racionales. Obviamente que depende de los docentes que integran y hablan. Pero como tema o contenido está en matemática II. Y en el taller, en tercero obviamente debe surgir obviamente alguna actividad o algún problema con los números racionales.

Ex 1: Y en particular ¿Se trabaja en los diferentes significados de la fracción en magisterio?

Ex 1: Depende también. Depende del profesor. Hay un acuerdo de sala. En general como parte del todo obviamente que sí. A veces se trabaja como.... bueno no me sale la palabra ahora. El que más se usa es parte de todo, después se usa como operador. Después, a veces en la proporcionalidad directa se trabaja algo de proporcionales como constante. Y no mucho más.

I: Entonces. ¿Cuál es el significado que con mayor profundidad se trabaja y por qué? Me dijiste que el parte de todo el que para vos más se trabaja. Y el de operador, y ¿por qué te parece que se eligen esos dos?

Ex 1: Uno me parece que hay un tema de que, nuevamente, el poco tiempo que tenemos al tomar opciones. Otra me parece que es el tema de, que es lo que se trabaja más en la escuela. En la escuela se trabaja el parte de todo, el operador, porcentajes. Y lo otro es que cuando tú te enfrentas al tema de racionales, al tema de concepto de fracción parte de todo, uno se encuentra con chicos que tienen muchas dificultades conceptuales y bueno el tiempo es muy escaso. Haces como opciones didácticas, "bueno, ¿qué sucede en la escuela, que es lo que se necesita?" Y

“¿que necesitan ellos en su formación en cuanto a las fracciones?". Me parece que va por ahí. No hemos tenido una decisión tomada profundamente en la sala de que cosas tomar, pero nos movemos en general en esos tres.

I: Y en particular con la relación parte de todo. ¿Cómo se enseña el concepto de relación parte de todo en magisterio?

Ex 1: Ehh... ¡qué pregunta! [risas]. Yo en general empiezo con cosas muy sencillas. Con situaciones problemáticas de la escuela. O sea, actividades de la escuela. Y a partir de ahí empezamos como a reflexionar y a ver, a buscar que sentido, que significado le encuentran ellas. Para ellas es muy difícil entender el racional dos quintos por ejemplos. O sea que "representa de la unidad, si la dividimos en cinco partes iguales tomamos dos". Eso que para uno es muy sencillo a ellas les cuesta. Ellas hasta después de haber trabajado de lo básico para ellas, dos quintos es un número que está entre el dos y el cinco. Les cuesta mucho identificar que dos quintos es menor que la unidad. O sea, toda la relación entre las fracciones y la unidad se trabaja mucho en magisterio. O sea, magisterio me parece que trabaja como en la escuela. Pero nos encontramos con las chicas de magisterio como que no, no han visto. O sea, como que lo que recuerdan en contenidos se les enseñó en la escuela, que fue poco y fue hace muchos años. Entonces me parece que como que hacer resignificar el sentido, el conocimiento de fracciones, yo empiezo desde abajo, desde el comienzo. "Bueno, tenemos una hojita, la unidad. La divido en cinco partes iguales. Tomo tres. ¿Que representa eso?". El otro día por ejemplo queríamos hacer la mitad de un tercio. "Tomamos una hojita, la dividimos en tres partes iguales. La volvemos a doblar en dos". Cosas que vos decís, ¿pero haces eso en magisterio? Y hay veces que sí. Que para resignificar el contenido de fracciones hay que empezar de lo básico. Porque no tienen, y les cuesta mucho relacionar la fracción, o el número racional, obviamente, las distintas representaciones del número racional, una es la fracción. Cuando vayamos a relacionar la fracción con su expresión decimal es otro problema más. O sea que como que hay muchos nudos que hay que trabajarlos. Y hay que trabajarlos profundamente. Y hay que darles tiempo a los chicos para que ellos pregunten. Hay que darles tiempo para que ellos repiensen lo que tenían antes. Como que es un tema muy lindo pero muy difícil de trabajarlo en magisterio.

I: Y después de todo ese trabajo que se hace ¿Se define el concepto de relación, o la relación parte todo, o se queda solamente con ese trabajo? ¿Se da una definición? ¿Hay un acuerdo de sala respecto a una definición de fracción en este significado?

Ex 1: A ver... llegamos a.... como que acuerdo de sala no hay. Es más, a veces hemos discutido distintas maneras de trabajar el número racional. Yo he optado en estos últimos años trabajar sobre número racional y cuando hago la representación como fracción, o la fracción como representante del número racional, me dedico mucho al tema de fracción parte de todo y a esto que decía recién. No defino los distintos significados. Trabajo, les explico que hay otros significados. Pero como profundizo en este parte de todo. O sea, toda la parte con el todo, la parte de como operador también. Pero no hay una definición explícita me parece. Por lo menos yo no, no la tengo.

I: Para trabajar y recomendarles a ellos. ¿Qué bibliografía usan de apoyo al concepto de número racional y para trabajar fracciones?

Ex 1: Hay muchas cosas. Nosotros con una compañera de trabajo armamos como mucho material y ella lo que hizo fue hacer como un rulo y hay toda una idea de cómo trabajar números racionales en magisterio. Ese rulo está basado en trabajos nuestros, en experiencias, y está basado en los documentos curriculares de Argentina, de Sadosky, que usamos bastante, Itzcovich, que usamos bastante. La colección esta de los librillos argentinos. En la línea de didáctica y contenidos argentinos para nosotros ha sido como un gran apoyo. Y estamos ahí. También yo trabajo un material de Instituto Nacional de México sobre fracciones y número racional que también está bueno. El tema es que acá en Uruguay no hay libro o cosas escritas para formación docente. O hay para secundaria, que a veces nos apoyamos y los mandamos a trabajar a mirar la biografía de secundaria. O hay una axiomática de reales en sexto año, que me parece que no es adecuado para nuestros alumnos de magisterio. O sea, empezar axiomáticamente con números reales y ahí definir números racionales. Entonces es como todo un tema que no, no hay material real. La compañera esta intentó hacer como un documento que lo usamos montones. Y en general, yo me apoyo mucho en Sadosky, en Itzcovich en el tema fracciones. Que es simplemente un trabajo escolar no. Es para formación de maestros, pero con un enfoque con una patita en la escuela. Muy interesante la propuesta de ellos.

I: Y dentro de las representaciones de la fracción, continua o discreta en la relación parte todo. ¿Cuál es la que más se trabaja en el Instituto, o se trabaja de igual forma las dos?

Ex 1: La que más se trabaja es continua. La discreta se pone algún ejemplo, pero poco. No me digas por qué, pero hay como un acuerdo de que trabajamos la continua. Es que trabajamos con el número racional, entonces ese es uno de los problemas que tenemos. Trabajamos con el concepto de número racional y como la fracción como un representante. Y ya nos vamos a ubicarlo en la recta, ya los comparamos entre ellos a los números racionales, y a veces el fundamento de la fracción queda, como que es un debe. Pocos docentes, me parece, que trabajamos con el concepto de fracción parte todo. Y eso trae como consecuencia después que los chicos te ubican a lo mejor, racionales en la recta, o sea, un quinto, tres octavos, e irracionales, pero cuando tú le preguntas, "¿pero que es tres quintos?", o sea, el concepto de fracción, o sea "¿Cómo haces tres quintos de 15?”. Ni idea. Como que ahí hay un quiebre en la formación que es re importante y me parece bárbaro que vos estés investigando y haya surgido ese tema porque ahí hay algo que hay que hincarle el diente. El quiebre entre que, uno trabaja el número racional, trabaja muy poquito con la fracción y da por supuesto que eso alcanza para que las chicas entiendan las fracciones y el número racional.

I: ¿Y en la escuela que te parece? Dentro de las dos representaciones ¿también se prioriza la continua? O capaz que en la escuela se tiende a hacer otra cosa.

Ex 1: Vos sabés que mucho no sabría decirte. Me parece que en la escuela se trabaja más las dos ¿No? No sé si la continua, pero la otra también se trabaja bastante. No sé. Ahí no tengo... viendo los libros, esos nuevos libros, los cuadernos para hacer matemática, la verdad que me he centrado más en la parte de geometría. No he hecho una lectura total de cuál es el recorrido de números racionales o de fracciones de los últimos libros que se han publicado. Es un debe. Pero se trabaja poco también, se trabaja poco. Por más que el programa diga "fracciones" en cuarto, en quinto, en sexto. Pero como que en segundo empieza con un medio y los cuartos. Pero operaciones con fracciones no se trabaja mucho me parece. Y se trabaja con ecuación de parte y todo. Ahí Carla te puede ayudar un poco más que es la que está más metida en la parte de escuela.

1.1.1.3 Entrevista 2 completa

Código: I: Investigadora – Ex 2: experto 2

Investigadora: La primera pregunta relacionada al funcionamiento más bien de magisterio, y vinculada a cómo funciona matemática dentro de magisterio es, ¿vos conocés la carga horaria total que tiene matemática en la carrera de magisterio?

Experto 2: Si. Teníamos una investigación, una indagación comparada. Yo ahora no me acuerdo del número, pero, no sé si era menos del 15%, por ahí andaba. Me tendría que fijar. Pero está entre el 10 y el 15%. Matemática.

I: Entonces ellos en realidad, la carga horaria semanal en primero y en segundo ¿cuál es, en particular?

EX 2: En particular es: en primero cuatro horas semanales y en segundo tres horas semanales. Y es lo único que tienen. O sea, son 28 semanas más o menos.

I: Y ellos tienen un taller ¿verdad?

EX 2: Tienen un taller. Pero es un taller de didáctica de la matemática. Que viene a ser... no se llama sólo... se llama "taller de profundización". Y ahí ellos tienen un semestre de una hora por semana. O sea que sería más o menos trece clases.... dos horas por semana, miento. Dos horas por semana. Serían 26 horas. Es como un taller de 26 horas. Y en ese taller hay un programa que nadie lo cumple. Porque hay un programa que está en el plan 2008. Y el taller termina desvirtuado en función de las necesidades de las gurisas para la práctica. Pero no es la función del taller. Ese no es el objetivo del taller. EL taller tiene un programa con ciertos contenidos. Quizás esté mal llamado taller porque lo que refleja es la metodología de trabajo que debería tener ese seminario digamos. Sería un seminario de tipo taller. Pero tiene su programa a cumplir, cosa que no siempre se hace. Queda como muy liberado a los docentes.

I: ¿Y para vos es suficiente la carga horaria que se tiene en la carrera de magisterio referente a matemática?

EX 2: Yo creo dos cosas. Que en la carrera del plan 2008 lo que falta es didáctica de la matemática. O una materia más amplia que fuera "educación matemática". Con didáctica yo ya me quedaría conforme. Donde entre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Obviamente no es. Pero yo creo que más horas solo de contenidos matemáticos no es la solución. Que la solución sería más un enfoque de la enseñanza de la matemática a través de una forma de mirar la matemática distinta. O sea, yo no extendería a matemática III y matemática IV como tal. Sino que, para mi gusto, el nombre de la materia tendría que reflejar que ahí sería enseñanza de la matemática o didáctica de la matemática. Donde el objeto es el análisis de los asuntos matemáticos, pero desde el punto de vista de la enseñanza y del aprendizaje.

I: Vos dijiste que "la solución sería..." ¿La solución ante que dificultad que vos ves en la carrera?

EX 2: Es que para mí la carga horaria del recorrido matemático del alumno, es muy exigua frente a la responsabilidad profesional. En su profesión los maestros, se supone, y creo que así lo hacen la mayoría, todos los días deberían trabajar un rato en matemática y un rato en lengua. Entonces, eso debería estar de alguna manera reflejado en su formación inicial. Ese trayecto que ellos van a tener de su formación desde nivel inicial hasta sexto, porque el título es único, ellos deberían de salir empoderados de un tratamiento sobre cómo hacer para enfrentar esas responsabilidades. Entonces ahí no es solo matemática, sino una mirada distinta de la matemática.

I: Entonces, más relacionado con lo que pasa en la escuela en realidad. ¿Conoces que porcentaje más o menos le deben de dedicar a la enseñanza de la matemática en la escuela las maestras o los maestros?

EX 2: Es lo que te digo, en una semana, todos los días ponen una actividad de matemática y lengua. Pero no ponen todos los días una actividad de ciencias naturales o de ciencias sociales, o de arte. Es decir que, media jornada, casi en general, o un tercio de jornada está dedicada a la matemática. Una jornada de cuatro horas.

I: Y los maestros entonces, la formación específica en el área de didáctica de la matemática ¿con quién la tiene? ¿Tiene una materia, es el taller, o no tiene?

EX 2: Ese es un taller de profundización en matemática. Que obviamente un taller de profundización en matemática con una carga en un semestre, de 26 horas es totalmente insuficiente colocada en un tercer año. Pero además no tienen las didácticas específicas. Y eso es una falencia que se viene cargando. EL último programa que tuvo didáctica de la matemática fue el plan 2005. En el plan 2005 si estaba más equilibrado esto que yo te digo, pero ni siquiera se llegó a completar una generación. Fijate que era de cuatro años el plan 2005. El plan 2008 ya lo cambian. Es decir que hay una generación de plan 2005 que terminan ya con un cambio de programa. Y eso ha sido una carencia muy grande. Porque la didáctica de la matemática queda responsablemente, solamente ubicada en la didáctica de segundo año. Que es una didáctica general, que es la Directora de la escuela de práctica, que tiene como responsabilidad en segundo año trabajar, creo que didáctica de la matemática y didáctica de las ciencias sociales. Y creo que en tercero trabajan didáctica de la lengua y didáctica de las ciencias naturales. Si no es así es combinado, pero, lengua y matemática están en segundo y tercero respectivamente. Y las otras dos también tienen la responsabilidad de enseñar la didáctica del arte. Entonces, un sólo profesional no tiene la capacidad, por más experto que sea, de tener bajo su ala la responsabilidad de formar en todas las didácticas específicas. Porque el objeto de conocimiento cambia de base. No es lo mismo enseñar matemática que enseñar lengua ni ciencias sociales. Y es el único año, en segundo, como responsabilidad en el dictado por parte de las practicantes en las clases, es en segundo año. Cuando solamente se ha tenido en su formación profesional, sólo han tenido un año de matemática, y nada de didáctica. Si el profesor de matemática I no se hace cargo de introducir algunos asuntos que pasan en la escuela, el alumno de magisterio cae en un segundo año en una práctica con un desconocimiento total. Solo porta su historia. Su historia como alumno. Y eso es re jodido. Porque una cosa es, cómo pensamos que aprendimos, y otra es realmente cómo aprendimos. Y esa distancia es insalvable si no te la hacen pensar.

I: ¿Entonces cuál es tu opinión respecto a que no tengan didáctica específica?

EX 2: Es una carencia muy grande en la formación inicial de maestros.

I: Bien. Ahora voy a la segunda parte de la entrevista que refiere al concepto que yo indico en mis objetivos. En particular me interesa saber ¿En qué año de la carrera se trabaja el concepto de número racional?

EX 2: El concepto de número racional se trabaja, hoy en el plan 2008 en matemática II. Está ubicado en el trabajo con la numeración racional, que termina con un panorama mínimo general de la numeración real. Pero en el transcurso del trabajo con la numeración racional se hace énfasis en las distintas formas de la representación, en particular en fracciones y expresiones decimales, fracciones decimales. La idea de densidad.

I: Y en particular ¿se trabajan los distintos significados de la fracción después?

EX 2: Como eso es un contenido didáctico, no es responsabilidad, lamentablemente, de matemática II. Eso queda librado a la decisión de cada docente. Curricularmente el profesor a cargo no está obligado, porque matemática II son contenidos matemáticos. Pero dada la circunstancia de que matemática II es en el contexto de la formación de un futuro profesional de la educación, yo estoy de acuerdo en que se debe hacer énfasis en asuntos didácticos. Pero eso no todo el mundo lo entiende así. Y como no está reglado por la currícula, queda al libre albedrío de cada docente o de cada sala, de cómo funcione. Y voy a ser un poco atrevida en esto que voy a decir. No sé si todos los profesores conocen el trabajo didáctico sobre la numeración racional. Porque es una responsabilidad del docente, entonces va a depender de la formación en el año que fue formado, sus estudios posteriores o lo que sea, si toma como desafío, si recoge el guante en ese trabajo. Pero me animo a decir que no todos los colegas pueden llegar a manejar los contenidos didácticos. No para que la matemática II se transforme en didáctica de la matemática, sino que, a través de la enseñanza de los contenidos matemáticos, vos destapes contenidos didácticos y los puedas transparentar. Pensando en que el alumno va a ser un futuro maestro.

I: Y dentro de esos conceptos, si bien manifestase que no está dentro de la currícula y muchos podrían no trabajarlo de esa forma, dentro de los que si los trabajan ¿cuál de los significados de la fracción te parece que se trabaja con mayor profundidad?

EX 2: Yo creo que el parte todo lamentablemente es el que se trabaja, porque es como hereditario de la primaria. Y parecería que la entrada al racional es por el parte todo. Cosa que yo discrepo. Para mí la entrada a la numeración racional es fuertemente a través de la medida, o del reparto. Son esos dos ejes para mí fundamentales, más que el parte todo. Porque el parte todo está a veces trabajado muy simplificadamente, no en la lista de aspectos que yo te decía que había, sino piensan que "dibujé la regletita", como vos ponés en el formulario, "pinté un cuarto, porque está dividido en cuatro. Entonces los cuartos son iguales a los octavos, a los décimos o a lo que sea". Y entonces se restringe a eso. Y sobre todo a fracciones menores que la unidad. Entonces a mí me parece que hay dos cosas. Parecería que el parte todo, desde la enseñanza sería lo más sencillo, cosa que yo no comparto porque no vive eso en el uso de los racionales. Para mí el énfasis debería ser más en el significado de reparto, de cociente y el significado de medida. Ahí es donde el racional vive con más fuerza. Aunque históricamente, si uno mira los currículos, se desprende que el parte todo tiene una presencia histórica en la enseñanza. No la he rastrado desde donde viene, pero es como "suéltame pasado" ¿no? [risas]. La gente que trabaja con las fracciones y dice "¿ves? el de arriba me indica las partes que tomé y el de abajo las partes que dividí". Y ese es un matete bárbaro, y se ve el parte todo como si fuera... es un solo significado, pero adentro tiene subdivisiones digamos. Hay muchas relaciones ahí adentro. Y no son siempre vistas de igual manera. Como lo conversábamos en el cuestionario. Una cosa es de la parte al todo, otra relación es del todo a la parte. Otra relación es entre las partes. Entonces vos vas cambiando digamos el lugar de la incógnita, y la construcción para el que aprende es distinta. Por eso es un asunto didáctico, y no es un asunto matemático. Pero igual yo sigo haciendo énfasis en que me parece que, más que trabajar eso... o sea, eso hay que trabajarlo. Pero el peso más grande tendría que estar desde la medida y desde el reparto o desde el cociente.

I: Y la relación parte todo en magisterio, ¿cómo te parece que la trabajan ustedes?

EX 2: Bueno, yo creo que algunos compañeros hace años la trabajamos bastante en profundidad y discutiendo estos aspectos. Y sobre todo la trabajamos recorriendo estas diferentes miradas que yo te decía. Con soporte en diferentes representaciones. Y con soporte en magnitudes continuas, discretas, es decir atendiendo unas cuantas variables. Viste que estoy diciendo en, el tipo de la relación que hay. Después también si estoy tomando la unidad mayor que uno o menor que uno, es otra consideración. Las magnitudes como te dije, continuas o discretas. Y además agregándole este asunto de parte todo y todas las combinaciones que hay adentro. Yo creo que se hace bastante en profundidad. Claro el tiempo es corto, y en desmedro de lo que aparece, yo creo que después lamentablemente en la práctica, la práctica prima sobre los aspectos teóricos que se discuten en la clase de matemática. Prima esto de pintar el pedazo y ya con eso me convenzo. Y no todas las otras discusiones. O sea, el parte todo yo creo que, no en magisterio, pero sí en la primaria, está banalizado. Una cosa que ha intentado salvarla han sido los cuadernos para hacer matemática, nuevos. Que ahí si vos hacés un recorrido, está bueno esto que te estoy diciendo, están libres colgados en la web, si vos haces un recorrido de cómo se trabaja las fracciones, ahí vos podés seguir el significado parte todo, como le van dando la vuelta a los problemas que van apareciendo en los distintos grados. Porque si no queda siempre trabajada de la misma manera. Pintar el pedazo sobre la representación continua que te estoy dando. Y una cosa, trabajar en magnitudes discretas es mucho más complejo que trabajar en magnitudes continuas para el trabajo con la parte y el todo. Porque tiene, al ser discreto, cada objeto que está representado es un uno, entonces ahí se confunde mucho el uno, la unidad, con la parte. Yo ahí no voy a romper nada ni voy a pintar un pedacito. Entonces eso es un asunto bien complejo me parece desde el aprendizaje.

I: ¿Ustedes dan alguna definición de la relación parte todo, o del significado parte todo, en magisterio? O se trabaja desde las actividades y no se define.

EX 2: No. Las trabajamos desde las actividades y no hay una única definición digamos. Porque justamente, es decir, a lo largo de todas estas actividades, recorriendo estos aspectos que yo te nombraba, la idea de trabajar con parte todo se contrasta por ejemplo con lo que es trabajar en un contexto, en un significado de medida. O en un significado de cociente, o de operador. O del racional como un coeficiente de proporcionalidad. Ahí van apareciendo los otros significados. Entonces el parte todo se contrasta con eso. Como un contexto más en que el racional vive, en particular la fracción.

I: ¿Qué bibliografía, cuando ustedes trabajan estos conceptos con las o los estudiantes de magisterio, les recomiendan para fracciones en general?

EX 2: En general fracciones, yo trabajo con el material que tengo escrito sobre eso. Los apuntes de trabajo sobre el trabajo con los racionales, que justamente esa serie de apuntes va recorriendo los distintos significados en que van apareciendo las fracciones. Después trabajamos con el apoyo de Miguel de Guzmán. Un libro de Anaya, de Bachillerato uno. Y en algunas ocasiones también trabajo con algunos clásicos, como el viejo y querido Osin. Otro material que hay de UdeA, que se llama "La Nueva Matemática", que también trabaja con algunos aspectos de los racionales. Y después aspectos didácticos son los que tienen el soporte de las actividades. Digamos, trasluciendo como se fueron preparando y trabajando en las clases. O el trabajo matemático que se hace en la clase. Por eso ese material que yo redacté, creo que está para mejorar, pero que va recorriendo esto de los distintos significados.

I: Como para resumir entonces ¿Cuál de las dos representaciones a vos te parece, dentro de discreta o continua es la que más se trabaja en el Instituto de la relación parte todo? Y por otro lado, ¿en la escuela?

EX 2: Sin duda la continua. En detrimento de la.... si porque la continua aparece hasta representada también, por más que hay como un porcentaje, pero la parte de un todo.... porque viste que la parte de un todo después uno la puede rasquetear y decir "bueno, pero en definitiva siempre estoy trabajando parte de un todo". Pero como aspecto de significado, tiene una restricción. Y el que se trabaja más es el continuo sin dudas. El discreto es como, algunos ejemplos que viven, pero la magnitud continua es la que más se trabaja.

1.2 Anexo: Número racional en el plan 2008 (currículo escolar)

Las siguientes tablas son de construcción personal y resumen los contenidos relacionados con número racional y fracciones presentes en el currículo matemático escolar.

Tabla 31: *Número racional en el plan 2008 del CEIP*

Nivel escolar		Contenidos
Tres años	**Racionales**	La relación parte–todo en cantidades discretas. El todo dividido en partes iguales (dos).
Cuatro años		La relación parte–todo en cantidades discretas y continuas. La noción de partes equivalentes en contextos continuos.
Cinco años		La noción de partes congruentes en la división de la unidad (discreta o continua). La noción de mitad y mitades. La representación numérica.
1er grado		La fracción como número: ½. Fracción de conjunto y de unidad. La composición y descomposición de la unidad con: - medios - cuartos. Las fracciones menores que la unidad: 1/2; 1/4; 3/4. La representación gráfica de fracciones.
2do grado		Las fracciones equivalentes, menores y mayores a la unidad. - Otras fracciones menores que la unidad: 1/3, 1/5, 1/8. La composición y descomposición de la unidad con: - medios y cuartos, - medios, cuartos y octavos, - tercios, - quintos. La comparación y ordenación de fracciones: 1/2; 1/4; 1/8. La relación de equivalencia de fracciones conocidas. La representación de las fracciones como puntos de una recta: 1/2; 1/4; 3/4.

3er grado		La fracción como cociente. La fracción decimal, décimos. - La notación fraccionaria y decimal. La comparación y ordenación de fracciones decimales mayores, menores e iguales a la unidad. La relación de equivalencia entre fracciones, entre expresiones decimales y entre fracciones y decimales. La representación de fracciones y decimales mayores y menores que la unidad como puntos de una recta. Su relacionamiento.
4to grado		La fracción como operador. Otras fracciones decimales. Centésimos. La noción de escala. Los números mixtos. El intervalo entre fracciones. Una fracción entre otras dos fracciones dadas. La comparación de fracciones de igual y distinto denominador (medios, cuartos, octavos; tercios, sextos, novenos; quintos, décimos). Las representaciones en la recta.
5to grado		La fracción como razón. Otras fracciones decimales. Milésimos. La expresión decimal, fraccionaria y mixta. La fracción como expresión de relación de proporcionalidad directa. La comparación y ordenación de fracciones de distinto denominador e igual numerador. Las diferentes representaciones gráficas.
6to grado		Las expresiones decimales periódicos y no periódicos. Las propiedades de la numeración racional: - idea de densidad - no hay anterior ni posterior Las relaciones de proporcionalidad directa e inversa. La fracción como expresión de una probabilidad.

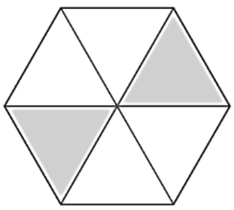
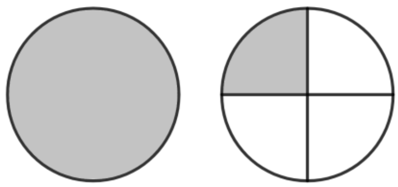
Tabla 32: *Operatoria con números racionales en el plan 2008 del CEIP*

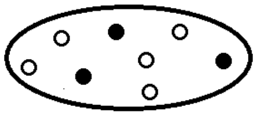
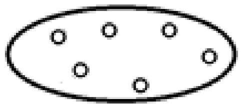
Nivel escolar		Contenidos
1er grado	**Operaciones**	**La multiplicación y la división.** - El significado intuitivo de las operaciones. **La proporcionalidad.** - La relación de proporcionalidad: doble-mitad.
2do grado		**La multiplicación y la división.** **Los distintos significados de las operaciones.** - El isomorfismo de medidas (proporcionalidad). - El producto de medidas (combinación). - El espacio único de medidas (producto escalar). **La proporcionalidad.** - La relación de proporcionalidad: tercio-triple; cuarto-cuádruplo y quinto-quíntuplo. - Las tablas de multiplicar. - El algoritmo de la multiplicación
3er grado		**La adición y la sustracción.** - La suma de fracciones más usuales: 1/2; 1/4. **La multiplicación y la división.** - El cálculo con número natural y racional (notación decimal). - Los resultados de las operaciones con números racionales. **La proporcionalidad.** - La relación de proporcionalidad: décimo-décuplo. - La relación entre las tablas de multiplicar: del 2 y 4; del 3, 6 y 9; del 4 y 8 ; del 5 y 10.
4to grado		L**a adición y la sustracción, la multiplicación y la división.** - El cálculo con números racionales utilizando las tres notaciones. - La adición y la sustracción de fracciones de igual denominador. - El análisis del uso del signo “igual” en la división con números racionales. - La existencia del elemento inverso. **La proporcionalidad.** - El coeficiente de proporcionalidad natural. - Los porcentajes menores de 100%. - Las relaciones con probabilidad y estadística.

5to grado	**La adición y la sustracción, la multiplicación y la división.** - La combinación de operaciones: uso de propiedades y de signos. - La adición y la sustracción de fracciones de distinto denominador. **La proporcionalidad.** - La relación de proporcionalidad y no proporcionalidad. - El coeficiente de proporcionalidad. - Los porcentajes mayores que 100% - Las distintas representaciones gráficas de magnitudes continuas y discretas (gráfica circular, de barras). - Las propiedades: linealidad y aditividad.
6to grado	**La adición y la sustracción, la multiplicación, la división y la potenciación.** - La multiplicación y la división de fracciones. - La potenciación como operación. **El cálculo pensado.** - Las relaciones más usuales entre fracciones y porcentajes. - El cálculo aproximado en la adición de números decimales. - El cálculo aproximado y redondeo con racionales. **La proporcionalidad.** - La relación de proporcionalidad directa, inversa y otras. - Los porcentajes menores que 10% y menores que 1%. - El cálculo del IVA y otros impuestos. - Las distintas representaciones gráficas de proporcionalidad directa, inversa y sin proporcionalidad. - Las relaciones de la proporcionalidad con iniciación al álgebra y comparación entre gráficos.

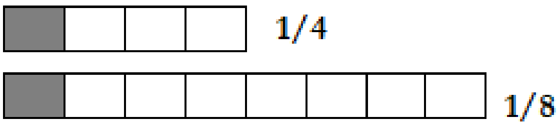
1.3 Anexo: Cuestionario 1

PREGUNTA 1

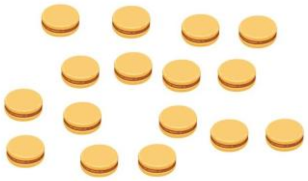
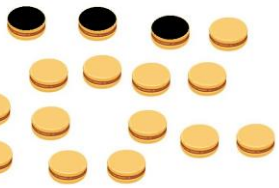
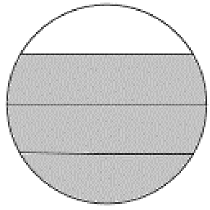
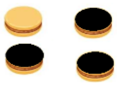
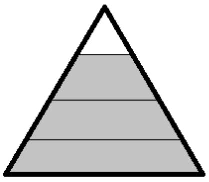
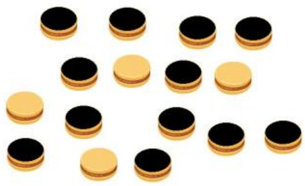
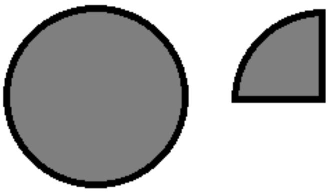
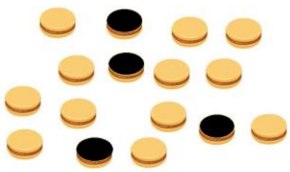
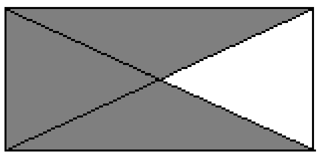
1.1	1.2
Teniendo en cuenta que la unidad es el hexágono y que está dividido en 6 partes iguales.  ¿Qué fracción representa la zona pintada de gris?	Teniendo en cuenta que el círculo es la unidad y que está dividido en 4 partes iguales.  ¿Qué fracción representa la zona pintada de gris?
(A) 2/4	**(A)** 5/8
(B) 6/2	**(B)** 5/4
(C) 2/6	**(C)** 5/3
(D) 4/6	**(D)** 2/5

1.3	**1.4**
 ¿Qué fracción del total de las canicas del conjunto, son negras?	Se sabe que el total de las fichas dibujadas en la siguiente imagen representan la unidad.  ¿Qué fracción representan las fichas negras? 
(A) 3/8	**(A)** 9/12
(B) 3/5	**(B)** 9/3
(C) 8/3	**(C)** 4/7
(D) 5/3	**(D)** 3/2

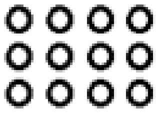
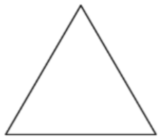
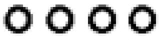
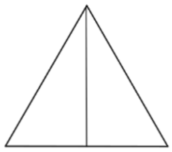
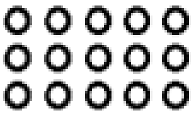
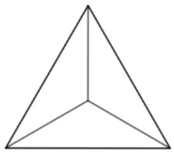
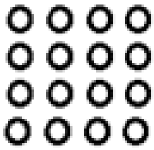
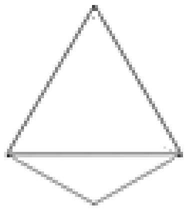
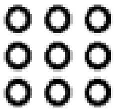
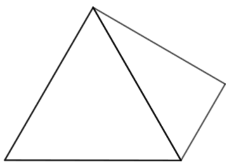
PREGUNTA 2

2.1	2.2
 Tomando en cuenta la representación dada. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?	Teniendo en cuenta que el rectángulo de borde negro es la unidad y sabiendo que una de las siguientes fracciones representa la zona pintada de gris, responde:  ¿Cuál es dicha fracción?
(A) Como se pintaron dos cuadraditos de igual tamaño podemos decir que 1/4 es igual a 1/8	**(A)** 1/4
(B) Como únicamente se pintó un cuadradito, las dos fracciones son equivalentes	**(B)** 1/3
(C) Teniendo en cuenta la relación entre la parte pintada y el todo, 1/4 es mayor a 1/8	**(C)** 1/2
(D) Teniendo en cuenta la relación entre el todo y la parte pintada, 1/4 es menor a 1/8	**(D)** 1/1

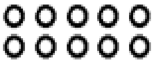
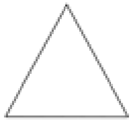
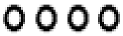
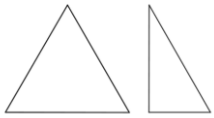
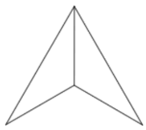
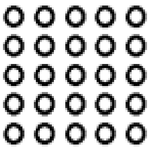
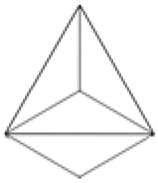
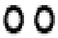
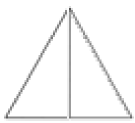
PREGUNTA 3

3.1	3.2
 ¿En cuál de las siguientes opciones se pintaron de negro 3/4 del total de los alfajores dados en la imagen?	¿Cuál de las siguientes opciones muestra una afirmación correcta?
(A) 	**(A)** Se pintaron de gris los ¾ del círculo 
(B) 	**(B)** Se pintaron de gris los ¾ del triángulo de borde negro. 
(C) 	**(C)** Se pintaron de gris los ¾ del círculo 
(D) 	**(D)** Se pintaron de gris los ¾ del rectángulo 

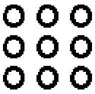
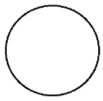
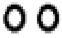
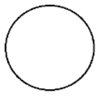
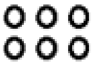
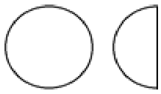
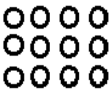
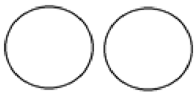
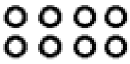
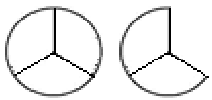
PREGUNTA 4

4.1	4.2
Si los 3/4 de la unidad son:  ¿Cuál es la unidad?	Sabiendo que la figura dada es un triángulo equilátero y que representa 2/3 de la unidad.  ¿Cuál de las siguientes representaciones podría ser la unidad?
(A) 	**(A)** 
(B) 	**(B)** 
(C) 	**(C)** 
(D) 	**(D)** 

PREGUNTA 5

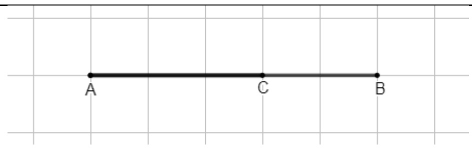
5.1	5.2
Si los 5/2 de la unidad son:  ¿Cuál de las siguientes opciones podría ser la unidad?	Sabiendo que la figura dada es un triángulo equilátero y que representa 3/2 de la unidad.  ¿Cuál de las siguientes representaciones podría ser la unidad?
(A) 	**(A)** 
(B) 	**(B)** 
(C) 	**(C)** 
(D) 	**(D)** 

PREGUNTA 6

6.1	6.2
Si los 3/4 de la unidad son:  ¿Cuál de las siguientes opciones representa 2/3 de la misma unidad?	Si los 4/3 de la unidad son:  ¿Cuál de las siguientes opciones podría representar a 6/3 de la misma unidad?
(A) 	**(A)** 
(B) 	**(B)** 
(C) 	**(C)** 
(D) 	**(D)** 

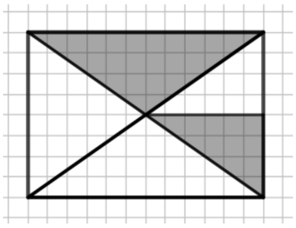
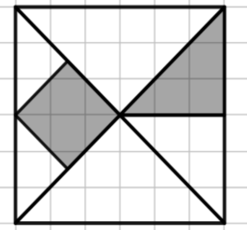
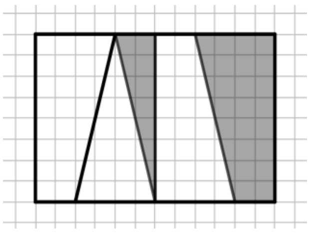
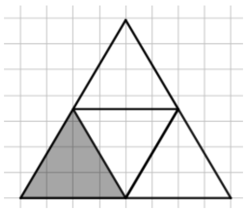
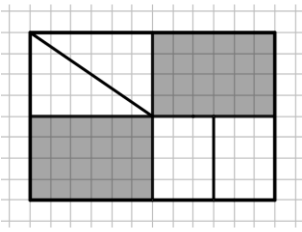
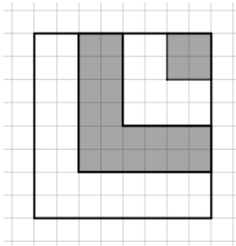
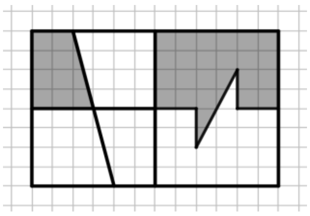
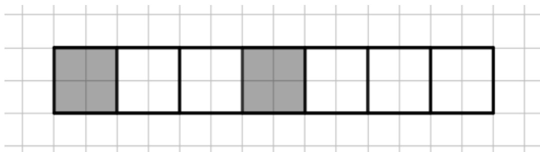
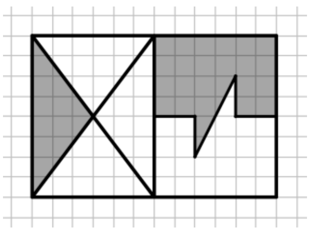
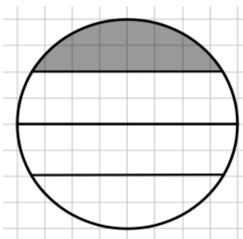
PREGUNTA 7

<table>
<tr><th>7.1</th><th>7.2</th></tr>
<tr><td>


Sabiendo que el cuadriculado que se presenta está formado por cuadrados iguales, responde:
¿Cuánto mide el segmento AB si consideramos como unidad la longitud del segmento AC?
</td><td>


Sabiendo que el cuadriculado que se presenta está formado por cuadrados iguales, responde:
¿Cuánto mide el segmento AC si consideramos como unidad la longitud del segmento AB?
</td></tr>
<tr><td>(A) 2/5</td><td>(A) 3/2</td></tr>
<tr><td>(B) 5/2</td><td>(B) 3/5</td></tr>
<tr><td>(C) 7/5</td><td>(C) 8/5</td></tr>
<tr><td>(D) 2/7</td><td>(D) 2/3</td></tr>
</table>

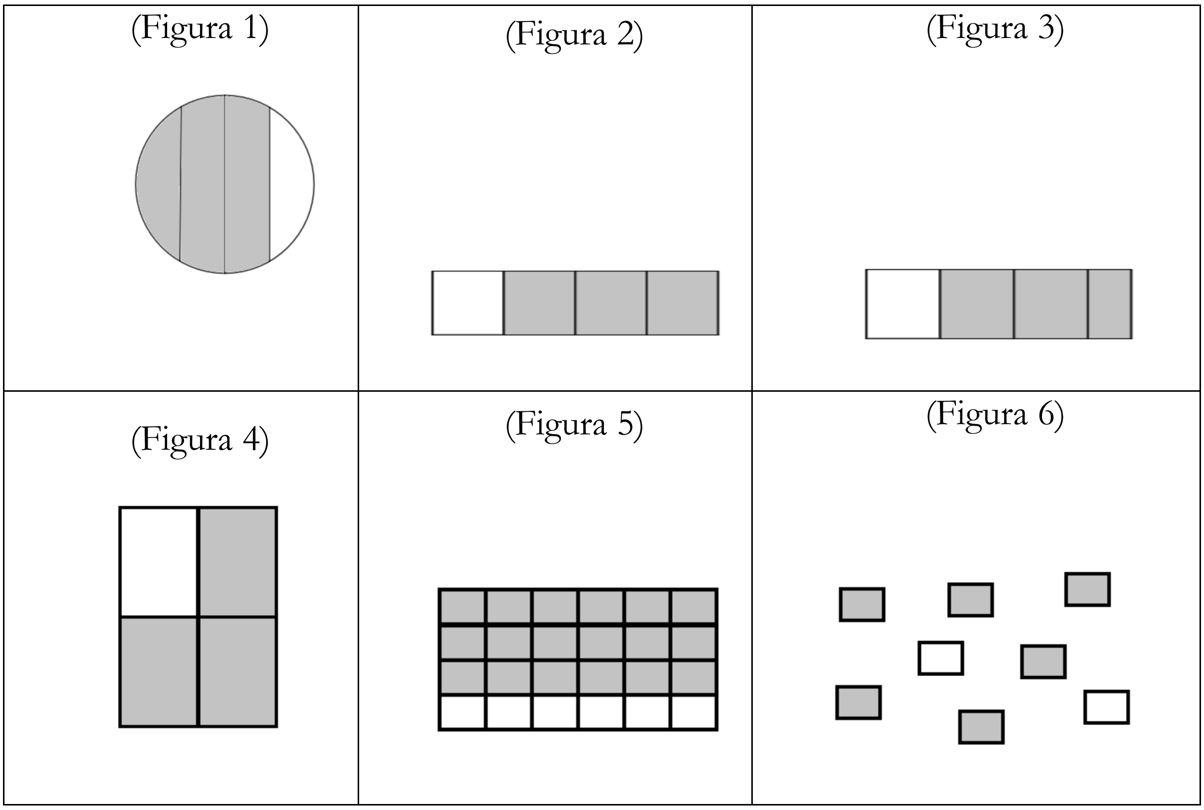
PREGUNTA 8

8.1	8.2
Sabiendo que el rectángulo es la unidad y que el cuadriculado que se presenta está formado por cuadrados iguales. Si se considera la zona pintada de gris en relación a dicha unidad:  ¿Cuál de las siguientes representaciones es equivalente a la anterior?	Sabiendo que el cuadrado es la unidad y que el cuadriculado que se presenta está formado por cuadrados iguales. Si se considera la zona pintada de gris en relación a dicha unidad:  ¿Cuál de las siguientes representaciones es equivalente a la anterior?
(A) 	**(A)** 
(B) 	**(B)** 
(C) 	**(C)** 
(D) 	**(D)** 

PREGUNTA 9

9.1

Teniendo en cuenta la parte sombreada de gris:



¿En cuál de las siguientes opciones se nombran **TODAS** las figuras en donde la zona pintada de gris representa $\frac{3}{4}$ del conjunto?

(A) Figuras 2 y 4

(B) Figuras 2, 4 y 5

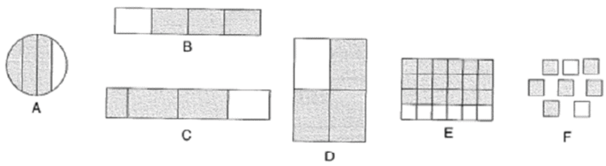
(C) Figuras 1, 2, 3 y 4

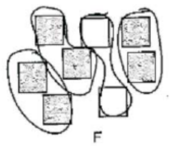
(D) Figuras 2, 4, 5 y 6

1.4 Anexo: Entrevista 2

Los investigadores Ivars, Buforn y Llinares (2016, p.55-56) en su trabajo de investigación proponen a futuros maestros el análisis de la siguiente actividad:

Actividad: ¿Qué figuras de las siguientes representa ¾?

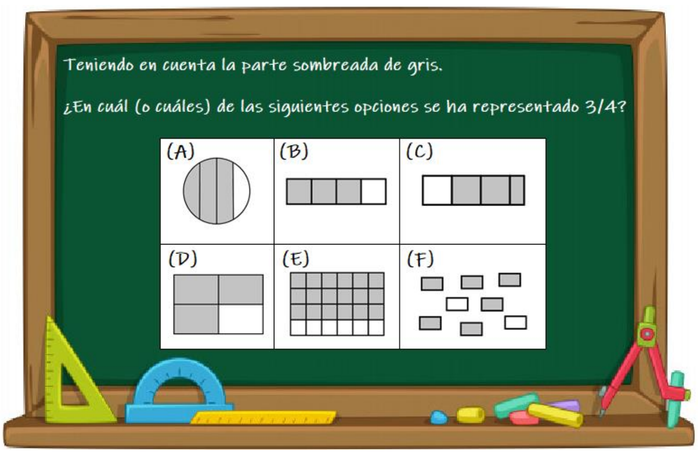


Respuesta de Víctor y Xavi	Respuesta de Joan y Tere	Respuesta de Félix y Álvaro
Júlia: ¿Cuál es vuestra respuesta? *Víctor: Mmmm, bueno nosotros creemos que la figura A, B C y D representan tres-cuartos.* *Júlia: Xavi, ¿tú estás de acuerdo con Víctor?* *Xavi: Sí, creo que sí porque A, B, C y D son 3 partes de 4 sombreadas, es decir tres-cuartos* *Júlia: ¿Estáis todos de acuerdo?*	*Joan: Nosotros no, seño (Joan forma equipo con Tere)* *Júlia: ¿Qué pensáis vosotros?* *Tere: Nosotros creemos que la figura B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales y hay tres sombreadas. Las figuras A y C tienen 3 partes de 4 sombreadas, pero las partes no son iguales…* *Júlia: ¿Y la figura E? ¿Qué pensáis de la figura E?* *Joan: La figura E no son tres cuartos porque si te fijas están divididos en 24 partes iguales y hay pintadas 18.* *Tere: Eso es, no son tres-cuartos.* *Júlia: Entonces la F…* *Joan y Tere: …. Tampoco, eso son 6 cuadrados sombreados*	*Júlia: ¿Estáis todos de acuerdo con la respuesta de Joan y Tere? ¿Hay alguien que lo haya pensado de manera diferente? ¿Félix y Álvaro qué han hecho?* *Félix: Bueno… sí. La A, B C y D son como dicen ellos (Joan y Tere), lo que pasa es que la E lo hemos hecho de otra manera…* *Júlia: ¿Cómo? Explícanoslo* *Álvaro: Bueno… mmmm pues así, mira. Si te fijas cada línea tiene 6 cuadritos, es decir son todas iguales, y como hay 3 líneas sombreadas de las 4 pues entonces son tres cuartos.* *Además… para la F también son tres cuartos porque si haces así (agrupando los cuadros de 2 en 2), obtienes 4 grupos de 2 cuadros, y de esos 4 grupos, 1,2 y 3 (señalando a la vez que cuenta cada grupo sombreado) están sombreados, que son tres grupos sombreados de los cuatro que tenemos*  F

La actividad anterior es adaptada a los objetivos del presente trabajo y da lugar a la entrevista 2 que se muestra a continuación.

Preguntas guía

Se propone la siguiente actividad a los estudiantes de la escuela



Parte 1:

(a) ¿Cómo podría responder esta tarea un estudiante escolar? ¿por qué?

(b) ¿Se te ocurren más opciones?

Parte 2:

Análisis de respuestas (se presenta primero la respuesta de Víctor luego la de Tere y finalmente la de Álvaro)

(a) ¿Cómo corregirías la respuesta del alumno? ¿por qué?

(b) ¿Qué aprendizaje/conocimiento tiene el estudiante acerca de las fracciones? ¿por qué?

(c) ¿Qué fortalezas o debilidades presenta el estudiante respecto al concepto?

Respuestas de estudiantes escolares:

Respuesta de Víctor (V)
V: Mmmm, bueno yo creo que la figura A, B, C y D representan tres cuartos. **M:** ¿Por qué crees que son esas figuras? **V:** Porque en las figuras A, B, C y D hay 3 partes pintadas de 4, es decir tres cuartos.

Respuesta de Tere (T)
Tere: Creo que las figuras B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales y hay tres pintadas de gris. Las figuras A y C tienen 3 partes de 4 sombreadas, pero las partes no son iguales... **M:** ¿y la figura E? ¿Qué piensas? **T:** La figura E no son tres cuartos porque si te fijas están divididos en 24 partes iguales y hay pintadas 18. **M:** Entonces la F... **T:** ...Tampoco, eso son 6 rectángulos pintados.

Respuesta de Álvaro (A)

A: Para mí son la B, D, E y F. La B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales y hay tres pintadas de gris. Mientras que en la E y F lo hice distinto.

M: ¿Cómo? Explícalo

A: Bueno....mmmm pues así, mira. En la figura E, si te fijas cada línea tiene 6 cuadraditos, es decir son todos iguales, y como hay 3 líneas pintadas de gris de las 4 entonces son tres cuartos.

M: ¿y en la F?

A: ...para la F también son tres cuartos porque si haces así (agrupando los rectángulos de 2 en 2), obtienes cuatro grupos, 1, 2 y 3 (señalando a la vez que cuenta cada grupo pintado) están pintados, que son tres grupos pintados de gris de los cuatro que tenemos.

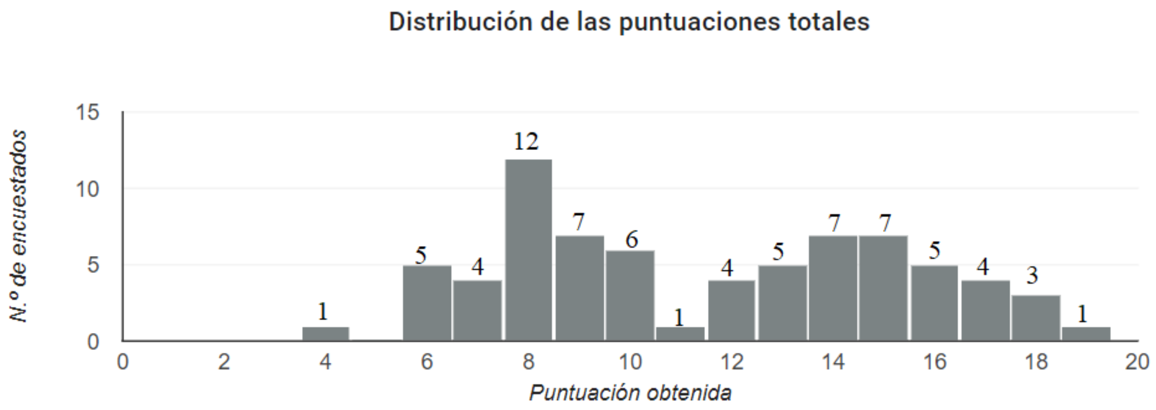
1.5 Anexo: Tabla de egresos en la carrera magisterio a nivel país.

Tabla 3. Cantidad de egresos según centro educativo del CFE. Periodo 2011-2017.

Centro educativo	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	Total	% sobre total	Promedio anual
IPA	290	263	277	264	253	265	263	1.875	18,1	268
IINN	189	128	122	59	152	188	139	977	9,4	140
IFD de Paysandú	46	68	68	81	85	107	100	555	5,4	79
CeRP Rivera	56	63	58	56	80	66	69	448	4,3	64
CeRP Salto	65	107	71	17	52	65	56	433	4,2	62
IFD de Melo	40	36	44	62	57	64	56	359	3,5	51
IFD de Tacuarembó	37	40	35	46	35	56	99	348	3,4	50
IFD de Salto	56	42	52	55	38	51	46	340	3,3	49
CeRP Maldonado	22	54	57	35	46	49	60	323	3,1	46
IFD de Artigas	42	48	42	52	39	47	49	319	3,1	46
IFD de Pando	23	31	36	51	67	39	64	311	3,0	44
IFD de Rivera	31	43	56	39	39	36	49	293	2,8	42
IFD de Florida	21	50	21	24	50	43	72	281	2,7	40
IFD de Canelones	22	42	46	38	41	46	44	279	2,7	40
CeRP Atlántida	22	57	47	25	39	41	43	274	2,6	39
IFD de Maldonado	20	48	26	37	39	34	52	256	2,5	37
CeRP Colonia	26	38	25	63	33	30	28	243	2,3	35
CeRP Florida	11	51	31	41	21	39	42	236	2,3	34
IFD de la Costa	18	32	26	27	51	39	42	235	2,3	34
IFD de Minas	28	38	25	28	33	29	41	222	2,1	32
IFD de Treinta y Tres	24	45	28	29	23	37	32	218	2,1	31
IFD de Durazno	26	29	27	27	39	30	25	203	2,0	29
IFD de Mercedes	34	19	25	27	30	30	29	194	1,9	28
IFD de Rocha	22	21	11	31	22	20	54	181	1,7	26
IFD de San José	6	24	25	21	31	24	32	163	1,6	23
IFD de San Ramón	11	26	34	22	22	26	19	160	1,5	23
INET	20	12	16	21	27	31	30	157	1,5	22
IFD de Rosario	22	18	17	25	31	21	18	152	1,5	22
IFD de Carmelo	12	24	18	22	17	21	16	130	1,3	19
IFD de Fray Bentos	19	26	17	18	17	15	17	129	1,2	18
IFD de Trinidad	4	8	7	9	5	6	10	49	0,5	7
IFES	0	0	0	0	0	0	5	5	0,0	1
Total	1.265	1.531	1.390	1.352	1.514	1.595	1.701	10.348	100	1.478

Fuente: División de Información y Estadística de CFE en base a registros de División Estudiantil de CFE.

1.6 Anexo: Distribución de puntuaciones obtenidas en el cuestionario 1



1.7 Anexo: Datos recogidos en la entrevista 2

1.7.1 Extractos de las entrevistas según indicador

Para abreviar se usa E para indicar los aportes del entrevistado e I para indicar aportes del investigador.

1.7.1.1 Indicador: Conoce errores o dificultades a priori (subdominio KFLM)

Entrevistado 2

I: ¿Por qué te parece que el primero puede contestar la A, la B, la C y la D?

E: Empezando, que pueden agregar la A y la C porque ahí ellos se fijan mucho por la representación gráfica de lo que está pintadito. Según las cantidades que estén pintaditas es a lo que corresponden. Como hay tres pedacitos pintados aunque no correspondan a la misma cantidad, no estén divididos en forma igual, ellos ven ahí igual tres cuartos. En la opción A y C.

Entrevistado 3

E: Y en realidad, si no respetamos tamaños es lo que te decía, puede ser la A, puede ser la C. Porque veo que hay cuatro partes, y que hay pintadas tres.

Entrevistado 5

E: Yo creo que ninguno de los niños se iría por la F, porque está disgregada de todos. Porque están como separadas, dispersos

-----

E: Pero si son niños de un cuarto como el que yo tuve, posiblemente les parecería que todas están bien.

I: ¿Por qué te parece que contestarían todas? E: Porque en todas están sombreadas tres partes de cuatro. No importa si son del mismo tamaño, si son proporcionales.

E: Yo creo que la A, por ser redonda, siempre, cuando estamos dando clase acudimos a la piza. Entonces la A va a ser una de las favoritas y no les va a importar como está partida. Y en la C, a pesar de que hay una parte más chica, igual hay tres partes sombreadas, y si son niños que recién se están familiarizando con las fracciones, no van a tener en cuenta que deben estar partidas proporcionalmente, que deben ser porciones iguales digamos.

Entrevistado 6

I: ¿Entonces una posible respuesta por un estudiante de la escuela?

E: El A o el B. Porque por ejemplo el C, hay tres cuadraditos pintados pero uno es más chiquito. Ah, y el D también. Y que por ejemplo el D y el F hay más cuadraditos que los que pide.

Entrevistado 7

E: Pero claro, Por ejemplo la C algunos la daría como correcta porque no toman... para ellos, pintaron tres cositos, tres espacios de los cuatro que hay disponibles. Y no se fijan a veces en el tema de que tienen que ser iguales esas partes. Por ejemplo. La E y la F sería muy complejo que ellos... sería un análisis en conjunto. De las respuestas yo creo que marcarían esas que te nombré.

E: Y creo que lo que he visto es que claro, están muy acostumbrados a la hoja centimetrada, y a las reparticiones. Y muchos van a caer en el error de la C, de "tengo cuatro espacios. Tengo cuatro cuadraditos. Entonces tengo que pintar tres de cuatro". O con la A, no se van a fijar exactamente de que las partes tienen que ser iguales.

1.7.1.2 Indicador: Reconoce, en las respuestas de estudiantes escolares, errores o dificultades comunes (Respuesta de Víctor, subdominio KFLM)

Entrevistado 1

E: que en realidad él lo ve como por la parte visual. Como lo que yo decía. El vio cuatro figuras que están divididas en cuatro, y que tiene tres partes pintadas, por tanto asoció.

I: ¿Y el razonamiento es correcto?

E: Es como la primera alternativa que se me ocurrió que podrían decir los niños y las niñas. Yo veo que me plantean una fracción. Y veo que hay cuatro figuras que tienen, la división que me indican digamos. O sea, me dicen "tres cuartos". Yo veo cuatro figuras que tienen cuatro partes y hay tres pintadas. Entonces por lógica... no sé si por lógica o mismo por lo que te expresa la fracción van a tender a elegir esas opciones.

I: Y la respuesta de Víctor ante esa actividad. Esas cuatro opciones que elige ¿Son correctas para ti?

E: [Pausa]. Me acabo de dar cuenta de algo que no me había dado cuenta en la prueba, cuando la hice. En realidad la figura C no tiene cuatro reparticiones iguales. Entonces hay como, que, eso que me pasó a mí seguramente le pasa a algunos niños y niñas también, de que tienden a ver como que ta, "hay una figura dividida en cuatro partes y tiene tres pintadas". Pero en realidad no son cuatro partes iguales. Entonces no son tres cuartos.

Entrevistado 2

E: [Lee] Si eso es típico que ocurra en una clase. Que respondan eso.

I: ¿Cómo corregirías la producción de Víctor?

E: Yo le volvería a preguntar, a volver a formular la pregunta. "¿Estás seguro que las preguntas A y C realmente representan tres cuartos? Fijate en la dimensión de los cuadraditos. ¿Son todos iguales?" Volvería a hacer una pregunta. No cortaría el diálogo. Obviamente también el tema de la E, que dejó afuera.

E: Yo le pondría "sí, es verdad, hay tres partes pintadas de cuatro, pero esas tres partes no son iguales en tamaño": Y que las compare. Por ejemplo si comparas la figura B y D, ahí tenemos, por ejemplo en el caso D, el rectángulo que está dividido en cuatro partes iguales. Y solamente hay coloreadas tres. O sea, me apoyaría también en las que están bien para que compare. Para que el vuelva a cuestionarse que A y C también corresponde.

Entrevistado 3

I: ¿Cómo corregirías vos la respuesta de Víctor?

E: Primero lo que te explicaba. Primero porque me parece que la A y la C no me parece que sean correctas, porque entiendo que tiene que estar representados en partes iguales.

I: ¿Ahí a Víctor qué le diría de la A y la C?

E: Que no está fraccionado en partes iguales. Y respecto a las otras en realidad, en la A, cuando dice "yo creo que la figura a representan tres cuartos". Volvemos a lo mismo. ¿Por qué representan tres cuartos? Si se supone que estamos fraccionando en partes iguales. Yo le preguntaría, en el caso de la A y la C ¿Están fraccionadas en partes iguales? ¿Hay la misma cantidad de partes grises pintadas en esos tres? Está dividido en cuatro, si está bien. Dicen que representan tres cuartos. Está dividido en cuatro, pero no en cuatro partes iguales.

Entrevistado 4

I: ¿Cómo corregirías tú la respuesta de este alumno?

E: [Lee de nuevo en voz baja]. Le pondría que A, B y D sí me parece que son correctas, pero que C no porque no es proporcional... los cuadraditos no están proporcionalmente.

Entonces como sabe él que ese cuadradito que es más chiquito representaría los tres cuartos de esa figura que tiene ahí.

E: Por ejemplo acá cuando le preguntamos tres cuartos, él lo que hace es, cuenta los cuadraditos. Y dice "ta, si son tres los que están pintados... para representar tres cuartos tengo que tener tres pintados de cada figura". Sea un cuadrado, una circunferencia, no sé, él va a contar que tengamos tres cuadraditos nomás pintados. Que no tenga más que eso.

Entrevistado 5

E: Primero le diría a Víctor que, si no le parecería oportuno, le propongo que revise todas las figuras primero. Que las vuelva a revisar "¿estás seguro de la respuesta?" Posiblemente me diga que sí porque quiere salir de eso. Entonces le voy a decir, "bueno, te acuerdas que cuando vimos..." recurro al conocimiento previo "Víctor te acuerdas que cuando vimos de qué se trata fraccionar una unidad hablamos de que todas las partes en las que repartimos deben ser iguales, deben ser del mismo tamaño. Entonces imagina que la B y la C son una barra de chocolate. Si tenemos cuatro niños, si agarramos la C... ¿Tú crees que todos los niños comerían la misma cantidad de chocolate si agarran la barra C que la barra B? ¿O habría algún niño que no esté de acuerdo con el pedacito que recibe? Ahora, con la A, yo le diría "¿Tú crees que en la A, si fuera una piza (porque siempre recurrimos al ejemplo del chocolate), tú crees que los niños que coman de esa piza van a comer la misma cantidad los 3 niños que van a comer esos pedacitos grises?" Así le diría.

Entrevistado 6

E: Que en realidad C no, porque el cuarto cuadradito es la mitad de la totalidad. El C no podría ser porque el último cuadradito es más chiquito que los otros tres. Está pintado pero no quiere decir que sea tres de cuatro.

I: ¿Y los otros serían correctos entonces?

E: Sí.

I: ¿Qué más le dirías a Víctor respecto a lo que él propone? Respecto a los que no eligió ¿qué más le dirías?

E: Y que los otros no podrían ser porque no representan tres cuartos. En realidad hay más cuadraditos

I: ¿Y los que sí eligió que tu considerás que están correctos?

E: Y que en realidad sí, que están bien. Ahora me generó una duda con el A. Porque en realidad, el primer cuadradito no sé si es igual a los otros.

E: Y que en realidad, si estamos hablando de opciones... pará... en realidad no son iguales por lo mismo que la C. Que en realidad el primer parte sombreada de A, no representa lo mismo que la segunda y la tercera hilera. Y que por ejemplo la B y la D, todos los cuadraditos parecerían ser iguales. Por eso sí podemos decir que es tres de cuatro.

E: En realidad él eligió la A, la B, la C y la D... claro porque, supongo que Víctor debe pensar, que los tres cuadraditos, que tiene que haber pintado sí o sí tres cuadraditos no importa si son más grandes o más chicos.

Entrevistado 7

E: [pausa]. Yo creo que acá, o sea. Pensando desde la presencialidad. Porque... yo creo que acá en la respuesta de Víctor veo lo que te estaba comentando recién. Ellos lo asocian a esto que él dice. Hay tres partes pintadas de cuatro. Y se ven los tres cuartos. Le preguntaría "En la opción A, todas las partes son iguales Víctor?" O en la parte C... Le haría visualizar. "Visualicemos la opción C... Todas las reparticiones que están en la unidad... todas las reparticiones ¿Son todas iguales Víctor? ¿A ti te parece que esta primera, por ejemplo la parte más chiquitita por hablarte así, representa exactamente lo mismo que la siguiente? ¿Serían un cuarto?". Como que iría por la visualización de lo que él está seleccionando. Visualizar esas partes pintadas, cómo son entre sí, con respecto a la unidad. Lo mismo con la A. Con la D, por ejemplo que para mí es correcta, y la B, lo tomaría en contraposición a los otros dos ejemplos que el nombra correctos.

I: ¿Qué debilidades y fortalezas tiene Víctor en su representación de la fracción?

E: Fortalezas, que sabe lo que tiene que identificar... o sea, que sabe lo que le están pidiendo representar, que es tres cuartos. En respecto a la unidad. Pero no tiene claro cómo se componen esos cuartos, como tienen que ser entre sí.

1.7.1.3 Indicador: Reconoce, en las respuestas de estudiantes escolares, errores o dificultades comunes (Respuesta de Tere, subdominio KFLM)

Entrevistado 1

E: En realidad, Tere lee las, por ejemplo la E y la F... bueno ahí ya se da cuenta que en la A y la C, las partes no son iguales. Que si bien está dividido en cuatro no son iguales, entonces no son tres cuartos. Y en la B y en la D sí. Lo que ella deja por fuera es la E y la F. Porque cuenta los cuadraditos, y no son tres cuartos. Al menos no así, expresados directamente. Lo que se podría hacer es llevarla por decirla así, o guiarla para que pueda ver si hay relación entre las fracciones, entre dieciocho sobre veinticuatroavos y seis octavos.

E: Que las partes en que se divide la fracción tiene que ser iguales para que pueda ser útil la fracción... la división, de la parte total. Porque ella dice, "están divididas en cuatro partes, pero las partes no son iguales". Sabe que es necesario que estén divididas iguales. Conoce la relación que hay entre numerador y denominador, o sea que "pinto tres partes de las cuatro iguales que tengo". Pero no asocia digamos, o en el momento no se da cuenta de que pueda haber fracciones equivalentes.

I: De igual forma, por ejemplo, frente a la misma respuesta de Tere, algunas compañeras tuyas respondieron que en la F, no hay tres cuartos representados. ¿Qué pensás tú de eso?

E: Yo cuando vi la fracción, en realidad, lo primero que hice fue, como si fuera un niño o una niña, contar. Tengo ocho rectángulos, y hay seis pintados. Y ahí me di cuenta en realidad que son fracciones equivalentes. Tres cuartos, es equivalente a seis octavos.

Entrevistado 2

E: Bien. En la primer respuesta de ella no intervendría. En la figura E... [Lee] Me dejó pensando de... me dejó pensando esta niña con el tema de la figura E. Porque si bien acá están divididos en 24, si yo tomo la fila, sí serían tres cuartos. Y ella lo tomó, cada pedacito como una unidad. Capaz que... yo trataría... yo como docente no hubiera puesto la imagen esta, porque puede generar eso. Porque en realidad, sí, ahí hay 24 partes, y sólo hay 18 pintadas.

I: ¿Entonces representa tres cuartos o no?

E: Y... si afino el ojo, no. No representa.

I: ¿Entonces estás de acuerdo con lo que dice Tere?

E: Sí estoy de acuerdo

I: ¿Y en la F que te parece, según lo que dice Tere?

E: La F estoy de acuerdo con ella, no representa tres cuartos. A no ser que yo tratara de unir esos cuadraditos. Pero fah... son ocho [cuenta]. ¿Son ocho cuadraditos en la otra?

I: Ajá

E: ¿Y hay cuantos coloreados? Si yo los contara, y los pusiera en columnas de a dos.

I: ¿Te animas a mandarme una foto de lo que estás dibujando?

E: Sí... si los junto sí.

I: Entonces la respuesta de Tere, ¿sería correcta, incorrecta?

E: Correcta la primera parte. Incorrecta la E... porque claro, si afino la mirada, cada cuadradito sería unidad. Y después intervendría por la F. Le propondría el ejercicio de unir esos cuadraditos para poder llegar a tres cuartos. Obviamente que me va a costar con ella, el desafío va a estar con la figura E, con el tema de tres cuartos. Porque claro, si ella lo toma por fila, la unidad. Pero acá tengo separadito cada cuadradito. Entonces ahí fue el problema mío en cómo seleccioné el recurso.

Entrevistado 3

E: Es que en realidad, como no tengo mucha noción, pero sigo su razonamiento. Yo cuanto conté las partes del E y del F me pasó lo mismo. Conté cuántos cuadraditos habían en total, y cuántos habían pintados. Igual, mirándolo, por ejemplo en la figura E... ahora que lo miro, puedo tomar también que está dividido en cuatro filas. Y en realidad sí, hay tres filas pintadas, de cuatro hileras de cuadraditos. Pero sí, si cuento los cuadraditos uno por uno, me pasó lo mismo. Conté 24 cuadraditos y solamente pintaba 18. No me cierra a tres cuartos. Y con la F me pasa lo mismo.

I: ¿Y por qué te pasa lo mismo con la F?

E: Bueno, en la F todavía es más claro. Porque ni siquiera lo puedo hacer por filas. Porque tengo tres filas por así decirlo, donde en la primera tengo tres pintadas y están rectas. Pero ya en la segunda tengo dos. Y en la tercera como que no defino... si cuento de arriba para abajo.

E: Yo me identifico más con el razonamiento de Tere que con el de Víctor por ejemplo. Tere habla, especifica de las partes iguales y hace el conteo de las figuras. Capaz que en una primera instancia en la E, capaz que te lleva a decir que son los tres cuartos, porque lo cuenta por filas.

E: Claro. Pero digo, en otra primera instancia capaz que si lo mirás por partes pintadas y no te fijás si son iguales o no, hubieras hecho ese razonamiento. De que tenés tres filas pintadas y son en realidad cuatro iguales, sin contar la cantidad de cuadraditos individuales. Digo que me identifico más con Tere, porque Tere identifica que hay 24 partes iguales y solamente 18 pintadas. Entonces no corresponde a los tres cuartos.

Entrevistado 4

E: La B y la D, cuando responde que la B y la D están divididas en partes iguales, le diría que sí, que es correcto. Porque la B y la D están divididas en partes iguales, es decir son equivalentes sus partes. Y que sí, que es correcto que son tres cuartos. En la figura E... [Lee]. Y que la E sí, es correcto lo que está diciendo porque está dividido en 24 partes, y sólo hay pintadas 18, o sea que no representa los tres cuartos que le estaría pidiendo la maestra que se fije en cada figura. Y la... cuando le pregunta la F, ella dice que tampoco "esos son seis rectángulos pintados". Claro no está representado los... son solo seis rectángulos, no representan los tres cuartos de cada figura. Para poder representar tres cuartos de cada figura tenía que haber...dividido cada rectangulito en cuatro. Y ahí sí pintar capaz que uno, y decía que si "bueno ta, del primer rectángulo están pintados tres cuartos". O haber representado solo cuatro triángulos y haber pintado tres.

I: ¿O sea que para vos, la respuesta que da sobre la E y la F es correcta?

E: Si para el razonamiento que ella está haciendo sí.

I: La respuesta de Tere en su conjunto, ¿Sería la que vos hubieses dado ante este problema?

E: Ahora pensándolo, sí.

Entrevistado 5

E: Bueno. Primero le diría que está muy bien la observación. Le diría "muy bien Tere, se ve que entendiste la propuesta. Tienes claro que las partes deben ser iguales. Y en la figura E, si tu pudieras convertir esa fracción que tienes ahí. ¿Qué fracción tendrías en la figura E? ¿La podrías convertir en una fracción más chica? Por ejemplo le preguntaría. ¿Qué fracción tienes en la figura E? ¿Porqué no la escribes en números?" Y bueno ahí Tere diría, "dieciocho, veinticuatroavos." Y ahí depende de si ya lo han visto o no. "¿Hay alguna manera de saber si esa fracción puede ser más chica?

I: A ver... como es eso de "más chica"

E: Con número menores, que tú puedas reducirla. Entonces depende de si ya han visto la equivalencia de las fracciones. Yo recurriría a ese concepto. Al de equivalencia. La invitaría que pasara a números. Que escribiera dieciocho veinticuatroavos y que encontrara, si hay una manera de reducirla, a ver si eso de pronto puede ayudarla a tener una respuesta distinta, por ejemplo. Y en la F, también. Recurriría en la E y en la F, recurriría a que escribiera la fracción que ve. Aunque dice que son 6 rectángulos pintados. Ella no está concibiendo el todo que está ahí. El conjunto F digamos, no lo está concibiendo. Ahí yo recurriría por ejemplo al porcentaje. "¿Qué porcentaje de los rectángulos que están en F, crees que están pintado? ¿El cuánto por ciento de los rectángulos están pintados? "¿Qué crees Tere, que porcentaje de los rectángulos que ves ahí está pintado?"

Entrevistado 6

E: Si yo creo que Tere va un poco más acertada, creo, no estoy segura. Porque en realidad, los tres cuadraditos son iguales entre sí, y si estamos hablando de fracciones se supone que tienen que ser iguales lo que está representado.

I: ¿Qué más le dirías a Tere? ¿Con lo demás que dice Tere con respecto a la E, a la F, estás de acuerdo?

E: [Pausa]. Si estoy de acuerdo si.

I: ¿Y cómo le corregirías esa parte a Tere?

E: Que la E, si sería una fracción, pero no es la que plantea, y por eso está bien. No serían tres cuartos pero si es una fracción. Y la F también, es una fracción, pero no sería... en realidad me genera una duda porque están separaditos. Pero como no tengo conocimiento respecto a eso no sé qué decirle.

I: Para vos, ¿se podría encontrar una fracción de esa representación que está en la F?

E: Sí podría llegar a ser una fracción. Pero no la que piden.

I: ¿Cuál sería la fracción?

E: Seis... ¿octavos? [Cuenta susurrando cuadraditos]. Sí, seis octavos.

E: Fortaleza, que en realidad ella tiene claro que para ser una ecuación... no, que para ser fracciones perdón, tienen que ser iguales. Tienen que... ay no sé cómo decirlo [risas], tienen que, no sé si es equitativa la palabra, pero tienen que ser iguales entre sí.

I: ¿Y la debilidad?

E: Y debilidad no encuentro.

Entrevistado 7

E: Con respecto a la primera expresión de que "creo que la figura B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales, y hay tres pintadas de gris"... o sea, con respecto a la primera expresión, diría que es correcto. Le diría que sí, que en esas representaciones, o sea en la figura B y en la D sí se representan tres cuartos. Y creo que acá se ve superada la debilidad que tiene Víctor. Creo que tiene claro de que las partes tienen que ser iguales. Que los cuartos, que las partes que comprenden la unidad, tienen que ser iguales. Ahora, con respecto a las respuestas siguientes y la interacción con la maestra... creo que no tiene la noción de la fracción como cociente... capaz que como cociente de enteros. Capaz que estoy diciendo cualquier cosa, porque no estoy expresando lo que quiero decir. Es decir, toma consciencia de que la unidad está repartida en 24. Pero no toma conciencia de que esos 18 sí están representando tres cuartos. Y lo mismo ocurriría con el F, que es creo lo que yo te decía al principio. Me parece que te lo dije. Que me quedaban dudas hasta a mí. Pero si yo quisiera calcular como... a ver capaz que lo estoy diciendo mal pero... yo sé que tres cuartos... o sea una fracción es un cociente de enteros. O sea que, si yo tengo que tomar 24... Si yo tengo que calcular los tres cuartos de 24, evidentemente me van a dar 18, si no estoy haciendo mal los cálculos. Entonces los 18 cuadraditos pintados sí están. No tiene claro, creo que... como es que se dice, no es "como cuenta" la expresión de la fracción, pero... no sabe calcular los tres cuartos de un número. De esos 18 me explico... de esos 24. Tendría que calcular 24, de... si, tres cuartos de 24. Y creo que ocurriría lo mismo con el F. Al cambiarles a ellos las representaciones, porque no están acostumbrados a esto. Ellos muchos... la visualización de ellos es la barrita. Las partecitas que pinto. Ya les cambias esto de representar como decía acá, en el E, y en el F, de otra forma, los tres cuartos, y ellos no... Creo que demuestran esto que no saben calcular los tres cuartos de un número por ejemplo. Y creo que a ellos les pasa eso.

1.7.1.4 Indicador: Reconoce, en las respuestas de estudiantes escolares, errores o dificultades comunes (respuesta de Álvaro, subdominio KFLM)

Entrevistado 1

E: Bien. [Lee]. Me costó un poco más entender el razonamiento de Álvaro.

I: La idea es la misma que el anterior. Primero que hagas la corrección a Álvaro.

E: En realidad en la respuesta B y D, iría como por el lado de Tere también. Explica que hay tres cuartos porque está dividida en cuatro partes iguales y hay tres partes que están pintadas de gris. Ahí sería como el mismo razonamiento.

I: O sea que ahora nos deberíamos concentrar en la E y la F.

E: Él lo que asocia en realidad... me cuesta un poco más corregirlo... Ta... él va a lo visual. Dice que hay seis cuadraditos. [Pausa larga].

I: ¿Qué aspecto del razonamiento de Álvaro te cuesta entender?

E: Que él dice... "si te fijás cada línea tiene seis cuadraditos. Es decir, son todos iguales. Como hay tres líneas pintadas de gris de las cuatro, son tres cuartos". Por lo que leo, entendí que verticalmente hay cuatro líneas, y hay tres pintadas, el elije la fracción por eso.

I: Vamos a la F. La respuesta que él da ¿qué te parece?

E: Hace el mismo razonamiento en realidad que con la E. En la E dijo que eran cuatro filas, ¿cómo es que dice? Si dice "hay tres líneas pintadas de cuatro", y acá lo que hace es agrupar en cuatro subgrupos, y como hay tres pintados de los cuatro subgrupos, indica que hay tres cuartos. Es como, creo que lo lleva más hacia el conteo. Sobre todo en realidad en la F. Agrupa, y obtiene subgrupos, y ahí deduce que... lo mismo que pasó en la E. Como hay tres grupos de esos cuatro, pintados, ahí tengo tres cuartos también.

I: ¿Y eso a vos te parece que es correcto?

E: No. Creo que en realidad está confundiendo conceptos.

Entrevistado 2

E: [Lee]. En la F hizo lo mismo, trató de agrupar los cuadraditos en dos, lo que yo había pensado anteriormente. En la figura E, tiene seis cuadraditos y todos son iguales. Como hay...

I: ¿Cómo corregirías vos la respuesta de Álvaro entonces?

E: El tema, es la cuestión de la E... que también el... Claro, la cuestión es el recurso. Yo ahí como que, [lee] "cada línea tiene seis cuadraditos, es decir todos son iguales. Y como hay tres líneas pintadas de gris, entonces son tres cuartos". Si eso es verdad, él ve, si él considera así yo se lo tendría que considerar como bien a eso.

E: Porque él toma esa línea de seis cuadraditos como una unidad. Lo tomaría como un cuarto. Y sí, se cumple que son iguales. Eso yo le validaría la respuesta. El tema es que si estuve anteriormente con Tere, también se ve el mismo problema. Porque no le puedo estar diciendo a uno que está mal y al otro que no.

I: ¿Entonces cuál de los dos estaría bien y cuál de los dos estaría mal?

E: Lo que pasa que yo... la E a mí también me está generando dudas. Porque si bien está dividido ahí, igual yo le daría la razón a Álvaro, me quedo con Álvaro. Me quedo con las respuestas de Álvaro.

Entrevistado 3

E: [Lee]. Ah... Álvaro sabe mucho más de fracciones que yo [risas]. Porque mientras te estaba contestando el segundo, estaba tratando de hacer ese razonamiento. En realidad en la F, si haces por ejemplo, lo dividís en cuatro partes iguales y pintas tres en cada lado, el total claro, son seis partes de ocho en total. Y en la E, lo va haciendo por las filas pintadas. Y también, porque contó seis de cada uno.

E: En realidad no habría que corregirla porque es el único que entiendo que hizo las respuestas bien. A medida que me las fuiste pasando, entiendo que me lo hiciste a propósito, de que en realidad es el único que lo explica bien. De hecho fue con la única respuesta que realmente entendí, cuál era el razonamiento correcto. El habla de la B, la de y la D, por un lado, son cuatro cuartos, porque están divididos en partes iguales. Y después separa la E y la F por otro lado, que es lo que hizo distinto. Igual no me queda claro con respecto... ah claro está bien, no incluyó ni la A ni la C. Estaba leyendo mal yo. El separa la B, la D la E y la F por un lado. Y después la B y la D por otro... no.

Entrevistado 4

E: La que contesta de la A y la B, está bien, es por lo que yo había pensado también, la B, y la D. Que son partes iguales. Y cuando hace lo de la figura E y la figura F, que en la figura F agrupa, sí. Pensándolo así, si tienen razón. Si los agrupas, si usas la estrategia de agrupar cuadraditos, sí, están representados los tres cuartos.

I: Entonces la F ¿representaría tres cuartos para ti?

E: No. Para mí no sigue representando. Pero viendo la estrategia que él usa, tendría que decirle que sí que está bien en agrupar... que está correcto que los agrupe y que si los agrupa sí representa los tres cuartos. Pero si era separado como estaba yo diría que no.

I: ¿Y respecto a la E que te parece?

E: [Lee en voz baja]. Sí. Pensándolo así, yo lo había pensado en un minuto así. Pero claro, todos los cuadraditos son iguales. Son equivalentes entre sí. Sí, está bien sí.

I: La E sí representa tres cuartos entonces

E: Claro, porque si nos ponemos a pensar que decíamos que tenían que estar en partes iguales, ahí están divididos en partes iguales.

Entrevistado 5

E: [Lee] Ahh, Álvaro ya puede ser profesor de matemática [Risas].

E: Yo le digo "Excelente Álvaro, me encanta que hayas encontrado tantas maneras de solucionarlo". No le corregiría. Y le diría ¿De qué otra forma podríamos escribir esa fracción en la E y en la F por ejemplo?" Iría a que salga del número escrito en tres cuartos, y que escriba como decía Tere por ejemplo, que ella decía dieciocho veinticuatroavos.

Entrevistado 6

E: Bueno... ahora me generaste un conflicto. Porque en realidad lo que hizo Álvaro fue hacer tipo como de, de la cantidad de números que tenía fue como haciendo fracciones más chiquitas. Por ejemplo en la F... [Lee una vez más]. Claro. Como que hizo equivalencias por ejemplo en la F. No sé si la palabra es equivalencia, pero como que de una fracción buscó la equivalente y que estaba ahí en lo que le marcó la maestra. Pero en realidad yo ponele, esta actividad no era para hacer eso. Ponele, si hubiera otra actividad que dice "busca equivalencias", capaz que sí. Acá no está buscando equivalentes. Lo que está representado dice que hay que buscar tres cuartos. Pero no sé si lo que él hizo está bien.

I: Entonces, en conclusión. ¿Está correcto lo que hizo para la F o no está correcto?

E: En realidad yo creo, no me acuerdo, que sí está correcto pero no es lo que pide.

I: Si fuera una equivalente entonces ¿no sería igual a tres cuartos?

E: Claro... pará... Pah. Me mataste. Pará... Si...

I: Y en la E, ¿qué te parece lo que responde para la E, en este caso Álvaro?

E: Me pasa lo mismo que la otra. Que capaz que sería un equivalente de tres cuartos capaz, lo que él pensó.

I: ¿Y entonces lo corregirías como correcto o como incorrecto? ¿Qué le dirías?

E: Que en realidad, creo yo, hace mucho que no veo fracciones, pero en realidad, está en lo correcto pero no es lo que se pide.

E: El puso la B, la D... que en realidad el reconoce, sabe lo que quiere decir tres cuartos... pero por ejemplo, la B y la D están bien. Igual creo que las otras también están bien. Pero. Claro, en realidad cuando él dice "lo hace distinto" es porque él está en otro conocimiento.

El está pensando en otra cosa, que es lo que no se pide. En realidad sí entiende las fracciones, pero claro, el va un paso más adelante capaz.

Entrevistado 7

E: Se lo daría correcto todo. Y la verdad que, la justificación que usa, y las... el razonamiento que hace, queda claro en el de este que te decía yo, en el E. Logra visualizar que la parte sombreada... esa explicación que él da, "si te fijás cada línea tiene seis cuadraditos". Que ni siquiera yo lo visualicé así. Yo pensé en 24 cuadrados, de entrada cuando fui a analizar dije "bueno tengo que calcular tres cuartos de 24, y 18 es..." El lo visualiza a través de la representación gráfica de forma correcta. Visualiza no... Tiene claro que las fracciones tiene que estar... que ser todas las partes iguales. Con eso justifica la parte, la primera, la B y la D. Y con respecto a la E lo que hace es eso, buscar... lo que hace es encontrar tres partes iguales... ve que la unidad completa está dividida en cuatro partes iguales que son las líneas de seis cuadraditos. Y logra visualizar que esas líneas... o sea, que un cuarto está compuesto por seis cuadraditos. Lo mismo hace en la F. Se da cuenta que agrupando de a dos cuadraditos, se representaría el cuarto. Entonces dice "hay tres conjuntos", dice ahí "agrupando los rectángulos dos en dos, obtienes cuatro grupos". Ahí logra delimitar que se representa los cuatro cuartos. Y te dice que hay uno, dos y tres. Quiere decir que logra identificar los tres grupitos de dos cuadrados que representarían los tres cuartos de la unidad. Creo que maneja claro el concepto de frac... eh... el concepto de unidad. O sea, visualiza bien los cuatro cuartos, y visualiza la parte de esa unidad, o el "un cuarto". Para después llegar a determinar los tres cuartos que se le piden.

1.7.1.5 Indicador: Identifica imágenes de un concepto en producciones de escolares (Respuesta de Víctor, subdominio KFLM)

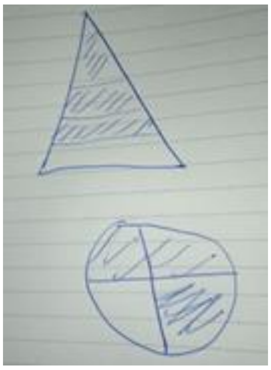
Entrevistado 1

I: Y entonces, ¿qué conocimientos te parece que este estudiante tiene sobre el concepto de fracción?

E: Y, sabe en realidad que el denominador indica las partes que selecciona, y que el numerador... ay, creo haberlo dicho al revés. Que el numerador indica las partes que tengo que seleccionar, y el denominador indica las partes en las que yo divido un todo.

I: Ahí va. ¿Cuál otra alternativa también hubiera elegido? Si se te ocurre más de una mejor.

E: En realidad se me ocurrió una ahora en el momento. Ahí te pasé dos opciones.



I: Bien. En la primera que tú me mandaste, que es el triángulo. ¿Por qué te parece que elegiría esa opción? E: Porque dijo que hay tres partes pintadas de cuatro.

I: ¿Y esta opción para ti, sería correcta, representaría tres cuartos?

E: No. Porque en realidad, la figura la idea era... como que la prolongación, o sea, la división que tiene, no son cuatro partes iguales. Sucede lo mismo que en la C. Sin embargo como él al final aclara, "hay tres partes pintadas de cuatro", creo que cualquier figura que se coloque, dividida en cuatro, y haya tres porciones de esas pintadas, él las va a seleccionar.

I: Y en la segunda opción que me mostrás, que es el círculo. ¿Cómo serían esas partes que dibujaste allí?

E: Tampoco son iguales en realidad. Tendría que ser, como se nota en realidad que las dos partes de abajo dibujadas son más... tienen como más proporción que las de arriba.

Entrevistado 2

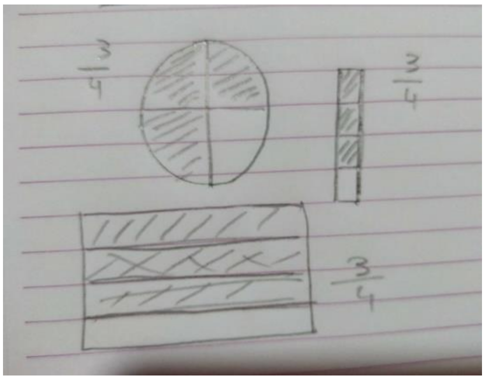
E: Claro, que hay un numerador, un denominador. Claro, y que también maneja dos representaciones, la gráfica y la....bueno ahí dice tres cuartos solamente. No está escrito en expresión fraccionaria. Asumo que también tiene conocimiento de la expresión fraccionaria, de la representación gráfica. Estoy pensando a ver qué conocimientos puede poner en juego para resolver la situación. Yo pensaría eso. El tema de la expresión fraccionaria. El concepto de fracción.

I: Si yo te pidiera que hagas otras posibles representaciones gráficas que Víctor también las asociarías con tres cuartos, diferentes a las que te di.

E: ¿Tienen que estar bien o mal?

I: Según lo que respondió Víctor digamos. Es para él. Representaciones que para él sean tres cuartos.

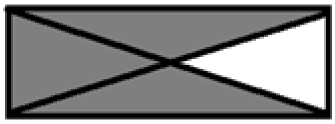
E: [dibuja]. Lo que pasa que ahora no se me ocurre mucha variedad. Puse tres ahí. Está medio desprolijo.



I: Por qué te parece que el círculo, la primera que me mandaste, ¿por qué te parece que indicaría Víctor según su respuesta, esa como tres cuartos?

E: Yo siguiendo, que intervine sobre el error de Víctor, que Víctor me daría una respuesta en función a que él había señalado la opción A como correcta. Y ahora me devuelve un dibujo de como estaría correctamente representado tres cuartos.

I: Y a ver, ¿qué te parece? Si yo le incluyera esta otra imagen dentro de las que él tiene representadas, ¿te parece que diría que, sin intervenir en el error de él, te parece que diría que esto es tres cuartos?



E: Si él me lo mira rápidamente me va a decir que sí, que está representando tres cuartos. Pero si después yo le empiezo a preguntar cómo están divididos los triángulos... si lo mira así rapidito, me dice que sí como respuesta inmediata. Pero si después empezamos a buscar la respuesta... ahí ya.

E: Porque él dice "tengo un rectángulo, que por sus diagonales está dividido en cuatro triángulos, y ve tres triángulos pintados ahí adentro". Aunque después yo le diga "pero esos triángulos no son iguales, no todos son iguales entre sí, sólo los que son ahí opuestos". O sea también volvería a compararle con la situación A y C.

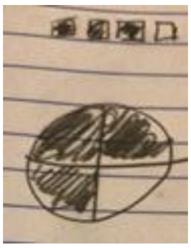
Entrevistado 3

I: ¿Qué aprendizaje o conocimiento tiene este estudiante respecto a la fracción?

E: Entiendo que sabe lo que es un denominador y lo que es un numerador. Que sabe qué número representa cada parte, porque si no, no podría determinar que se representa tres cuartos. O sea, conocimientos previos tiene. Nociones de lo que es fracción tiene. Entiendo que no llega... capaz que lo mismo me pasa a mí, porque no tengo muy claro fracciones... eh... que no puede precisar el aprendizaje.

I: Bueno. Si yo te preguntara ¿qué otro tipo de representación podría elegir Víctor también como representante de tres cuartos?

E: Sí. [Dibuja]. Yo no soy buena dibujando pero siempre imaginando que tenemos partes iguales. [Dibuja] Te mando foto.



I: La primera representación que me mandaste. ¿Por qué te parece que esa sería una representación que Víctor elegiría?

E: Porque tiene cuatro partes que se supone que son iguales, y tiene pintada tres. O sea, siguiendo el razonamiento de Víctor. Yo no la elegiría porque yo entiendo que tiene que estar todo como dentro de una misma figura. O por lo menos es una de las interpelaciones que me han hecho. Porque por ejemplo, yo entiendo que hay cuatro partes, y que están pintadas tres... si sigo el razonamiento de Víctor. Y de hecho hay, cuatro partes, y tres solamente pintadas. La representé así, que es más o menos como la figura F, porque me ha pasado que en la escuela me dicen que no son porque "no están todos adentro de una misma figura". Por ejemplo del círculo, por ejemplo del rectángulo. Como que no está dividido. Si no que hay, como cuatro cuadraditos, o cuatro rectángulos. Me parece como sumamente interesante ese razonamiento. De que para que lo tenga que dividir, tenga que ser parte de una misma figura.

E: Sí. Yo entiendo que son tres cuartos. La dibujé porque me parece interesante en realidad cuando me hacen ese planteo. Yo entiendo que son tres cuartos.

I: ¿Y por qué te parece que hacen ese planteo en general los estudiantes?

E: Y porque cuando les enseñás fracciones generalmente lo que les transmitís es que tienen que dividir una figura. Que tienen que repartir dentro de la misma figura. No le decís, tenés cuatro manzanas, y tres me las cómo. Siempre le hablás como de un conjunto de cosas. Por ejemplo, la piza entera se divide en porciones. Una tableta de chocolate se divide en cuadraditos.

I: ¿Alguna otra representación que, según las respuestas que nos dio Víctor, podría elegir también dentro de las representaciones?

E: Sí, puede ser. Porque yo la circunferencia la dividí en cuatro pero digo, en el ejemplo a, también está dividido en cuatro, pero no en partes iguales. Según el razonamiento de Víctor también pude haber hecho un triángulo también dividido en cuatro partes, aunque no todas las partes sean iguales.

I: ¿Lo podrías dibujar? E: Sí claro [Dibuja].

I: En ese triángulo ¿Qué es lo que está pasando?

E: Tengo cuatro partes, tres pintadas, pero en realidad, no tienen la misma dimensión. No está la misma cantidad de partes pintadas. Yo lo entiendo así.

Entrevistado 4

I: ¿Y qué imagen tiene sobre la fracción él? ¿Cómo hace Víctor para encontrar esta fracción tres cuartos? E: Y para mí cuenta las partes. O sea, si me pongo en la figura A, él dice "bueno a ver. El círculo está dividido en cuatro partes. La maestra me pregunta cuánto es tres cuartos. ¿Yo cómo sé cuánto es tres cuartos? Porque bueno, tres en este caso... tiene cuatro partes, tres están pintadas. Representas tres cuartos. En la figura B que él nombra también es lo mismo. "Hay cuatro cuadraditos. Si la maestra quiere representar tres, ¿Cómo hago? Bueno pinto tres, y el que quedaría sería tres cuartos, tres cuartos de la fracción está pintada". Para mí hace esa relación.

I: Si yo te pidiera que dibujaras otra representación que no estuviera ahí en la imagen que para Víctor también fuesen tres cuartos.

E: [Dibuja]

E: Yo creo que él pensaría "bueno, en la circunferencia cuantas... está dividida en cuartos, en cuatro partes. Entonces tiene tres pintadas y una no, entonces ahí tengo tres cuartos. Tres cuartos de la figura están pintados".

I: ¿Y esas partes en las que están divididas el círculo, que características cumplen?

E: Son iguales. Capaz que en el dibujo no se nota mucho pero son iguales. Que él haga ese relacionamiento "ta, está dividida en cuartos, sus cuatro partes son iguales y tiene pintada tres, entonces es tres cuartos de la figura.

E: Si la del rectángulo, es la segunda. Ahí creo que también pensaría que está dividida en cuatro partes iguales y lo que hace es, que dice "bueno ta, son cuatro partes iguales, y quedan tres pintadas y una no".

I: ¿Y esos tres triángulos que están pintados, son iguales?

E: No, no serían, pero el razonaría que sí. Yo creo que el razonaría que sí... y que como están divididas en partes iguales, entonces sí. Pero no son iguales.

I: Para vos, esa representación ¿Son tres cuartos?

E: No. No porque no son iguales los dos lados de los costados no son iguales que los de la base. No son triángulos equiláteros todos.

E: En la última, la pirámide. Yo pensaba lo mismo. Que él iba a hacer lo mismo. Iba a contar de que estuviera dividida en la misma fracción, y que iba a decir que eran tres cuartos. Según como nosotros le representemos el dibujo. ¿No? Que parezca que las tres partes están divididas iguales.

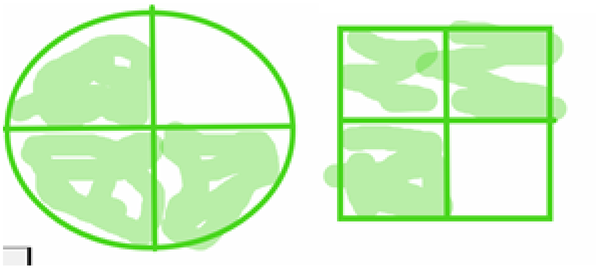
Entrevistado 5

I: Si yo te pregunto, ¿Qué aprendizajes o qué conocimiento tiene Víctor acerca del concepto de fracción? E: El conoce que la fracción tiene numerador y denominador. Y conoce qué es lo que representa cada uno. El sabe que el numerador determina la cantidad de, ahí lo dice, de partes pintadas. Y sabe que los cuartos es lo que determina en cuánto está fraccionada la unidad.

I: ¿Algo más conoce Víctor sobre las fracciones?

E: [Lee la actividad]. Pues, él conoce como que es la representación de que se parte una unidad en unas partes. No sabe que son iguales, por ejemplo.

E: Estas las identificaría rápidamente [realiza el dibujo en zoom]. Y otra que no sea esa [pausa]. Tal vez un cuadrado. Vamos a hacer un cuadrado. Listo

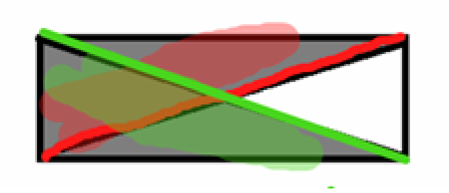


I: Y las partes, las está eligiendo ¿por qué motivo?

E: Porque son las que generalmente nosotras las maestras les dibujamos. Es a eso a lo que recurrimos digamos. Se recurre al ejemplo de la piza y a veces con material concreto recurrimos a una hoja. Entonces este cuadrado representaría una hoja, entonces decimos "partimos la hoja por la mitad, ahora la partimos en cuartos".

E: Posiblemente sí. Elegiría cualquier otra figura que estuviera partida en cuatro, no importa si son iguales o no. Como la C y la A.

I: Por ejemplo, una compañera tuya ante la misma pregunta, me dio como representación, esta, que también la elegiría Víctor. ¿Qué te parece?



E: Yo digo que no. Porque me parece que no tendría... para llegar ahí habría que tener más claro un concepto geométrico. Eso para mí sería más geométrico, que el niño sepa por ejemplo que dentro de las propiedades del rectángulo, las diagonales lo parten por la mitad exacta, y no creo que estén en ese nivel. Si además está manejando este tipo de ejercicio, sería para un tercer o cuarto año.

I: Esta representación que yo te di, ¿representa tres cuartos?

E: Para mí sí.

I: Pero vos cuando arrancaste con el concepto que Víctor tenía sobre las fracciones, dijiste que no reconocía que las partes debía de ser iguales. Entonces ¿Como es el tema de la fracción? ¿Tienen que ser iguales, no tienen que ser iguales?

E: Tienen que ser iguales sí. Si tienen que ser iguales. Sí tienes razón claro. Ahora que vuelvo sobre eso... sí.

I: Tienen que ser iguales ¿En qué sentido?

E: En proporción.

I: Entonces este rectángulo, ¿está representando los tres cuartos o no?

E: Para mí sí. Posiblemente para Víctor también porque si él no tiene en cuenta la proporcionalidad puede ser sí.

Entrevistado 6

E: Que si él respondió eso, por ejemplo que A, B y C son iguales, quiere decir que él, como hay tres opciones pintadas de cuatro piensa que todos son iguales. Pero por ejemplo en la C, y en la A, los mismos cuadraditos o las mismas partes que están pintadas no son iguales entre sí. Y que él piensa, cree que las fracciones, por ejemplo, que tres de cuatro es lo mismo. Que no son equitativas, no sé como se dice, que no son iguales entre sí. El piensa que tienen que ser tres, y no importa si uno es más grande o chico que el otro.

I: Si yo te pregunto ¿Qué otro tipo de representación haría Víctor? Me lo podés dibujar y me lo mandás por una foto.

E: Por ejemplo lo que se me viene más gráfico, más fácil de explicar es que haría cuatro canicas iguales y pintaría tres.

E: [Realiza el dibujo]

I: Entonces para vos, estas tres figuras, Víctor respondería que estas tres figuras representan tres cuartos. ¿Son las únicas representaciones que este estudiante diría que son tres cuartos? Según la respuesta que el dio, ¿podrían haber otras representaciones que para este estudiante también fueran tres cuartos?

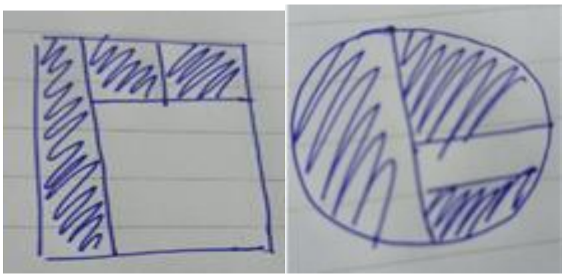
E: Supongo que sí. Podrían ser otras cosas no. De cuatro amiguitos pintar tres.

Entrevistado 7

E: No. Que él sabe que la unidad de él es sobre cuartos. Y como le pide representar tres cuartos, sabe que va a tener que pintar de esa unidad, tres partes. En realidad ahora no tengo teóricamente como era... sé que las fracciones tienen, no quiero parecer una burra [risas]. Se estudian como reparto, como... Sí, él sabe que si tienen que representar tres cuartos, sabe que de toda esa unidad que son los cuatro cuartos, sabe que tiene que pintar tres. Pero no sabría darte una respuesta exacta de algo así.

E: La relación que hay entre los cocientes que representan la fracción, porque él sabe lo que tiene que pintar... de esa fracción. [Lee en voz baja].

E: [Dibuja]. Ahí te envié dos posibles formas que podrían salir... en lo que el concepciona como tres cuartos.



I: La primera, que es un rectángulo, un cuadrado. ¿Por qué te parece que Víctor elegiría esa como tres cuartos?

E: Porque ve que la unidad como quien dice, ese rectángulo, está dividido en cuatro partes. Entonces de esas cuatro partes tiene que indicar tres. Que es lo que le está indicando el numerador de la fracción.

I: ¿Y esta respuesta sería correcta?

E: No. Claro. Creo que se alinearía a la respuesta C por ejemplo, en la repartición... en la representación... el estaría teniendo algún problema en la representación de un cuarto, de los cuartos que conforman a esa unidad.

I: ¿Y en la otra?

E: Lo mismo. Pero en un diagrama circular.

1.7.1.6 Indicador: Identifica imágenes de un concepto en producciones de escolares (Respuesta de Tere, subdominio KFLM)

Entrevistado 1

I: Bien. Entonces. Esta estudiante, Tere. ¿Qué aprendizajes tiene acerca de las fracciones?

E: Que las partes en que se divide la fracción tiene que ser iguales para que pueda ser útil la fracción... la división, de la parte total. Porque ella dice, "están divididas en cuatro partes, pero las partes no son iguales". Sabe que es necesario que estén divididas iguales. Conoce la relación que hay entre numerador y denominador, o sea que "pinto tres partes de las cuatro iguales que tengo". Pero no asocia digamos, o en el momento no se da cuenta de que pueda haber fracciones equivalentes.

E: Ella dice que hay seis rectángulos pintados. Entonces quizás que si hubiera cuatro rectángulos pintados, ella capaz que sí hubiera elegido, por lo que parece, la respuesta. No tres, digo, tres. Si hubieran tres rectángulos pintados de la F, quizás ella si la hubiera elegido porque como que hubiera elegido, digamos, hubiera tomado cuatro de estos rectángulos que están en la F, y si hay tres pintados como que divide en dos partes a estos rectángulos. ¿Me explico?

I: A ver explícate un poquito mejor.

E: Viste que ella dice "Hay seis rectángulos pintados". entonces como ella responde eso se me ocurre que pudo haber pensado que si yo pinto tres de estos rectángulos, tomo cuatro, cuento solo cuatro de estos ocho, tengo tres pintados, quizás que ahí sí me pueda servir la figura. Esa parte digamos de las figuras.

Entrevistado 2

I: ¿Qué conocimiento o aprendizajes tiene Tere sobre fracciones?

E: A ver. Sabe el símbolo y que las partes son iguales.

I: ¿Algo más que se pueda agregar?

E: No.

Entrevistado 3

E: Que tiene que haber partes iguales. Lo destaca. Y en realidad tiene la relación de cuanto es el número. ¿Cómo llegás a los tres cuartos? Ella contó los cuadraditos en la figura E. Y en la figura F. No se guió solamente por el conocimiento de lo que podía ser las partes iguales pintadas de la cantidad total. Sabe que por ejemplo hay una relación numérica. Que por más que haya la misma cantidad de, vuelvo a la figura E. Por más que haya la misma cantidad de cuadraditos pintados, de las tres partes, de cuatro que hay, en realidad no corresponde numéricamente a los tres cuartos que se están pidiendo. Porque de 24, 18 no es una relación.

E: Porque en realidad en la figura seis hace el mismo razonamiento que en el E. Tenés ocho partes pintadas... ocho no... Sí ocho partes en total. Pero solamente tenés seis pintadas. Entonces no se corresponde a los tres cuartos. Si vos tuvieras en realidad ehh... de los ocho pintados, para que te diera los tres cuartos, tendrías que estar pintando... ehh... [Pausa]. No realmente no sé cuantos cuadraditos, pero no son seis.

Entrevistado 4

E: Que en este caso por ejemplo, para que sean tres cuartos tienen que ser partes iguales de la figura. En este caso que está representados ella lo que busca es que sean partes iguales. Que la figura representen partes iguales, como parte de la B y de la E. Que si vos miras cada cuadradito es equivalente.

Entrevistado 5

I: ¿Y qué concepto de fracción te parece que tiene Tere?

E: La fracción es la suma de las partes. Como que, es solamente una cosa que se parte. Una unidad partida. Para mí, ella cree que es una figura sola, y se toma de esa figura sola única, se toma una parte.

I: Cuando vos decís una figura sola única te estás refiriendo por ejemplo a ¿Cuáles imágenes?

E: A la D. A las que ella eligió, la B y la D. Porque además ella eligió como figuras que son muy evidentes. Que a simple vista llevan a que está correcta la respuesta. Yo también las primeras que elegiría serían esas dos. Porque sé que no me voy a equivocar.

I: Y con la respuesta que Tere está dando en la E ¿Qué te parece? Ese concepto que tiene ¿Cómo lo está usando para el caso de la E?

E: Ella dice que son 24 partes y hay pintadas 18. Yo creo que todavía no conoce sobre la equivalencia de las fracciones. Me parece que es muy de lo concreto Tere. Esos niños están muy en lo concreto. Porque ella está contando 24. No está viendo que hay cuatro filas. No ve la fila uno, la fila dos y la tres. No las ve. Sólo lo vemos después de haber visitado muchas veces ese tipo de representaciones.

Entrevistado 6

E: Que Tere a diferencia de Víctor, en realidad ella sí considera a las fracciones como que tienen que ser iguales. Por ejemplo con la A, y con la C no pasa. Que aunque estén pintado tres cuartos, no quiere decir que sean porque no son iguales entre sí esos tres cuart... esos cuadraditos.

Entrevistado 7

E: Sabe que como reparto, tienen que ser las partes iguales. Eso creo que lo tiene claro. Pero como el cociente... en realidad creo que... no me acuerdo como es que se dice en términos de racionales... Esto que yo te decía. Cuando tienen que calcular la fracción de un número. Y más... interpretarla desde una representación gráfica, creo que no lo manejan. Es que en realidad las maestras no lo enseñan así... no lo he visto. Lo he visto en magisterio nomás esto. En mi experiencia práctica... aclaro.

I: Te voy a mostrar otra imagen más. Esta respuesta. Vamos a suponer que entre estas seis imágenes también se ponía esta representación para tres cuartos. ¿Cuál de los tres estudiantes te parece que la elegiría dentro de los tres cuartos, como representante de los tres cuartos?

E: Mirá, el último no la elegiría.

I: O sea, Álvaro no la elegiría.

I: Para que te los pongo en orden. Víctor sería el primero. Tere. Y Álvaro el último.

E: Porque Tere y Álvaro logran diferenciar con respecto a la opción C, que está representada ahí, que no son iguales las partes. Entonces, visualizando el rectángulo que está seleccionado, determinarían que no todos los triángulos son iguales. Víctor sí caería en ese error. Porque no logra delimitar el tema de la igualdad que tiene que tener las partes. Yo diría eso. Como que Víctor sí y Tere y Álvaro no. Aunque puede entrar en discusión porque es una figura geométrica... bueno, una figura geométrica con los otros triángulos que a la vista, pueden ser considerados como iguales, los triángulos.

1.7.1.7 Indicador: Conoce procesos y estrategias que aplican los estudiantes al enfrentarse a una actividad matemática (subdominio KFLM)

Entrevista 1

E: En la primera en realidad, como por lógica, que si tengo cuatro partes, en alguna de las figuras pinto tres.

I: ¿Entonces la respuesta de ese estudiante cuál sería?

E: Sería la A la B, la C y la D. De acuerdo serían esas cuatro opciones.

E: Después... en realidad no sé si contestarían los estudiantes pero también... los niños y las niñas, pero, se me ocurre que si no podrían buscar fracciones equivalentes. Veo que la figura E y la F, por ejemplo, la E y la F tienen más cuadraditos que cuatro.

E: Que tengo, por ejemplo la torta, o un cuadrado dividido en cuatro porciones iguales y pinto tres. La segunda opción sería, de acuerdo a las figuras que tengo acá, buscar... no sé si diría el doble. Porque en realidad serían como buscar fracciones equivalentes tanto en la E como en la F.

E: En realidad lo podría decir con palabras, capaz que podrían decir ellos. Por ejemplo, lo que decía yo, una segunda opción sería, "cuento los cuadraditos de la F veo que hay ocho, y hay seis pintados. Entonces después lo asocio con tres cuartos. Yo veo que seis es el doble de tres y ocho es el doble de cuatro".

I: ¿Y elegiría las otras anteriores, qué te parece?

E: ¿Si elegiría la F y no las otras en primer lugar?

I: Claro. ¿Elegiría solo la F te parece a vos ese estudiante?

E: No, yo creo que en realidad... porque es como más visual. Tienden como a lo que es, a simple vista, la relación del número con la figura. Yo creo que en realidad independientemente del nivel de niños y niñas, van a elegir los cuadrados, o el cuadrado, o por ejemplo el círculo que está dividido en cuatro y tiene pintado tres. Después si se les interrogase, o si se les descartaran esas opciones por algo, o el planteo fuera por otro lado, ahí sí, como que se cuestionarían si la F o la E podrían ser respuestas.

Entrevista 2

E: Como escolar, te pueden hacer la opción B, la D, la A y la C también

-----

E: Si. Otro puede contestarme la B y la D.

I: El siguiente estudiante me dijiste que podía contestar B y D. ¿Por qué?

E: Porque ahí sí están divididos los cuadraditos en partes iguales y realmente están pintados tres cuartos. Digamos. Me cuesta este ejercicio de pensar como un estudiante. Lo que pasa que a veces se apoyan mucho en tener que estar pintando. Yo ahora estoy en práctica en un quinto año, y salen con un círculo pintando a que equivale esa fracción. Están muy apegados a la representación gráfica

-----

E: Ahora que estoy viendo también podría surgir la E.

I: ¿Un estudiante que conteste sólo la E?

E: Si, ahora que estoy mirando. No veo bien yo. Agrandámelo. Ah sí son, si yo miro [cuenta], si la E también estaría. Ahí hay tres cuartos también.

I: ¿El estudiante que contesta la E, sólo contesta la E, o contesta alguna más?

E: Agregaría la B y la D, y la E.

Entrevista 3

E: ¿Partimos de la base de que saben lo que son fracciones y ese tipo de cosas? Porque por ejemplo, a mí, sabiendo lo que son fracciones y todo, como primer respuesta te diría que puede ser la A, la B y la D. Ahora...

I: ¿Porqué dirías que son la A, la B y la D como primer respuesta?

E: Porque si me dice que tengo representados tres cuartos, en realidad, en cuatro partes iguales tendría la B y la D, entiendo, a primera vista. La A, me genera la duda, porque en realidad como que las puntas no respetan el tamaño de los cuatro cuartos. O sea, si completáramos cuatro cuartos, no están repartidos en partes iguales. Lo mismo me pasa con la C, y con la E y la F.

I: La primer respuesta que daría un estudiante sería la B y la D entonces.

E: Sí.

E: Y en realidad, si no respetamos tamaños es lo que te decía, puede ser la A, puede ser la C. Porque veo que hay cuatro partes, y que hay pintadas tres.

Entrevista 4

E: Yo creo que indicarían, lo que harían sería contar, la primer parte irían contando, indicarían la A, la B y la C. Se familiarizarían más con esa. Y la D. Porque como dice tres cuartos, ellos contarían y dirían, "bueno, los tres que están pintados representan el tres, y el otro el cuatro. Esos son los que indican tres cuartos.

E: y podrían decir la F también, porque podrían decir que está representado con la cantidad de cuadraditos que hay, que lo que estaría pintado serían los tres cuartos.

E: En la E. Que la parte que está pintada de gris representaría los tres cuartos. Porque está dividido... viste que si vos contás las líneas está dividido, una línea, dos líneas, tres líneas, cuatro líneas. Que cada línea representa una parte de los tres cuartos, y que lo que pintaron fue tres cuartos, tres líneas de la figura.

I: ¿Ese estudiante elegiría solo la E como tres cuartos?

E: No, incluiría a todas las otras, la E.

E: [Pausa] Que otro estudiante diga, pero que diga por ejemplo, la D y la E, y saque la C, porque viste que los cuadraditos no están proporcionales al tamaño. Y que diga que bueno, como la C no tiene los cuadraditos proporcionales y la F tiene más cantidad de cuadraditos pintados, que tres, y son mayor, diga que sólo son, la D, la E, la A y la B. Que aparte como la C y la F.

I: A ver eso último. ¿Podés explicarlo un poquito más?

E: Quedaría aparte la C y la F. No las incluiría como que sí... la C porque viste que no están proporcionales los cuadraditos. Entonces que diga "no, como no son proporcionales, eso no representa tres cuartos". Y la F por la cantidad de cuadraditos que tiene y la cantidad de cuadraditos que están pintados no sería proporcional. Que marque sólo A, B, D y E. Como que están representados los tres cuartos.

Entrevista 5

E: Dependiendo del curso, de la clase. Si fueran niños de sexto, probablemente contestarían la B, la D y la E. Yo creo que ninguno de los niños se iría por la F, porque está disgregada de todos. Porque están como separadas, dispersos. Si fueran de sexto la A no la contestan porque se dan cuenta que no son partes iguales, y la C tampoco. Pero si son niños de un cuarto como el que yo tuve, posiblemente les parecería que todas están bien.

I: ¿Por qué te parece que contestarían todas?

E: Porque en todas están sombreadas tres partes de cuatro. No importa si son del mismo tamaño, si son proporcionales.

E: Yo creo que la A, por ser redonda, siempre, cuando estamos dando clase acudimos a la piza. Entonces la A va a ser una de las favoritas y no les va a importar como está partida. Y en la C, a pesar de que hay una parte más chica, igual hay tres partes sombreadas, y si son niños que recién se están familiarizando con las fracciones, no van a tener en cuenta que deben estar partidas proporcionalmente, que deben ser porciones iguales digamos.

Entrevista 6

E: [Lee] Pueden llegar a pensar que de cuatro tienen que haber tres marcados. Pero por ejemplo, que en realidad, de la D a la F hay más número de las que dice. Que en realidad no hay cuatro. Hay muchos más.

I: A ver ¿Por qué? ¿Cómo sería esto de "hay más números de los que dice"?

E: Claro porque hay más cuadraditos. Por ejemplo en el E, no sé cuantos cuadraditos hay, pero hay más que cuatro. Entonces capaz que ellos pueden decir "el A, el B y el C en realidad sí son cuatro cuadraditos, y hay pintados tres. Pero en los demás hay más cuadraditos, y que en realidad no está representado el cuarto como totalidad". No sé si me entendés.

I: ¿Entonces una posible respuesta por un estudiante de la escuela?

E: El A o el B. Porque por ejemplo el C, hay tres cuadraditos pintados pero uno es más chiquito. Ah, y el D también. Y que por ejemplo el D y el F hay más cuadraditos que los que pide.

I: ¿Alguna otra más que se te ocurra que puedan seleccionar?

E: Podrían seleccionar la C, pero teniendo en cuenta que en realidad el último cuadradito es más chiquito. Y capaz que eso no lo ven como un cuatro, sino como un tres y medio. Como que representa medio cuadradito pintado.

I: El primero que me dijiste que seleccionaría la A y la B. ¿Por qué te parece que seleccionaría esas?

E: En realidad no había visto la D. Pero entraría también dentro de lo que yo te dije. La A, la B y la D. Porque hay tres partes del cuatro que están pintados.

Entrevista 7

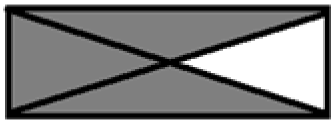
E: Por mis experiencias yo te diría. Lo que hay que buscar, para ellos, es tres cuartos. La D, seguro que la incluirían como posible respuesta correcta porque, por la división, a esa la visualizarían como correcta. La B también. Y, te diría que la A también la considerarían. No tanto la C. Algunos quizás la C. Te doy la opción que yo veo que ellos podrían responder aunque como tu decís no fueran correctas.

E: Mirá. La D te decía porque van a visualizar, que eso lo visualizan, los cuatro repartos como quien dice dentro del denominador, y van a seleccionar pintar las tres partes de los tres cuartos. Después, lo mismo con la B, sería lo mismo. Tengo cuatro cuadraditos, que es como ellos están asociados a trabajar las fracciones, a visualizarlas. El problema de ellos que yo he visto trabajando fracción es el tema de la visualización de la unidad. Por eso el trabajar de forma aislada la fracción, la representación... para mucho por ejemplo cuando le pedís comparar fracciones. A veces sería bueno que trabajan mucho las maestras el tema de los papelitos centimetrados. Pero claro, Por ejemplo la C algunos la daría como correcta porque no toman... para ellos, pintaron tres cositos, tres espacios de los cuatro que hay disponibles. Y no se fijan a veces en el tema de que tienen que ser iguales esas partes. Por ejemplo. La E y la F sería muy complejo que ellos... sería un análisis en conjunto. De las respuestas yo creo que marcarían esas que te nombré.

1.7.1.8 Indicador: Dificultad independencia de la forma presente en las respuestas de los propios entrevistados (subdominio KOT)

Entrevistado 2

I: Y a ver, ¿qué te parece? Si yo le incluyera esta otra imagen dentro de las que él tiene representadas, ¿te parece que diría que, sin intervenir en el error de él, te parece que diría que esto es tres cuartos?



E: Si él me lo mira rápidamente me va a decir que sí, que está representando tres cuartos. Pero si después yo le empiezo a preguntar cómo están divididos los triángulos... si lo mira así rapidito, me dice que sí como respuesta inmediata. Pero si después empezamos a buscar la respuesta... ahí ya.

I: ¿Y por qué te parece que si lo mira así...?

E: Porque él dice "tengo un rectángulo, que por sus diagonales está dividido en cuatro triángulos, y ve tres triángulos pintados ahí adentro". Aunque después yo le diga "pero esos triángulos no son iguales, no todos son iguales entre sí, sólo los que son ahí opuestos". O sea también volvería a compararle con la situación A y C.

Entrevistado 4

I: En la del rectángulo ¿no? Estamos mirando...

E: Si la del rectángulo, es la segunda. Ahí creo que también pensaría que está dividida en cuatro partes iguales y lo que hace es, que dice "bueno ta, son cuatro partes iguales, y quedan tres pintadas y una no".

I: ¿Y esos tres triángulos que están pintados, son iguales?

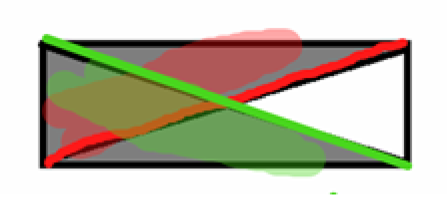
E: No, no serían, pero el razonaría que sí. Yo creo que el razonaría que sí... y que como están divididas en partes iguales, entonces sí. Pero no son iguales.

I: Para vos, esa representación ¿Son tres cuartos?

E: No. No porque no son iguales los dos lados de los costados no son iguales que los de la base. No son triángulos equiláteros todos.

Entrevistado 5

I: Por ejemplo, una compañera tuya ante la misma pregunta, me dio como representación, esta, que también la elegiría Víctor. ¿Qué te parece?



E: Yo digo que no. Porque me parece que no tendría... para llegar ahí habría que tener más claro un concepto geométrico. Eso para mí sería más geométrico, que el niño sepa por ejemplo que dentro de las propiedades del rectángulo, las diagonales lo parten por la mitad exacta, y no creo que estén en ese nivel. Si además está manejando este tipo de ejercicio, sería para un tercer o cuarto año.

I: Esta representación que yo te di, ¿representa tres cuartos?

E: Para mí sí.

I: ¿Por qué?

E: Porque está el rectángulo está partido por las diagonales, Y las diagonales lo parten por la mitad. Entonces tenemos una mitad toda pintada de gris. La otra mitad, que está partida por la mitad, tiene una parte gris. Para mí sí son tres cuartos.

I: ¿Pero son iguales las tres partes que están pintadas de gris?

E: En superficie sí. En forma no, pero en superficie sí.

Entrevistado 7

I: Te voy a mostrar otra imagen más. Esta respuesta. Vamos a suponer que entre estas seis imágenes también se ponía esta representación para tres cuartos. ¿Cuál de los tres estudiantes te parece que la elegiría dentro de los tres cuartos, como representante de los tres cuartos?

E: Mirá, el último no la elegiría.

I: O sea, Álvaro no la elegiría.

I: Para que te los pongo en orden. Víctor sería el primero. Tere. Y Álvaro el último.

E: El que no la representaría de entrada sería el último que me mostraste que es Álvaro. Ese no. El que sí lo representaría sería Víctor. Con convicción, Víctor la pondría. Y creo que Tere, no la pondría tampoco. I: ¿Por qué te parece que Víctor la elegiría y los demás no?

E: Porque Tere y Álvaro logran diferenciar con respecto a la opción C, que está representada ahí, que no son iguales las partes. Entonces, visualizando el rectángulo que está seleccionado, determinarían que no todos los triángulos son iguales. Víctor sí caería en ese error. Porque no logra delimitar el tema de la igualdad que tiene que tener las partes. Yo diría eso. Como que Víctor sí y Tere y Álvaro no. Aunque puede entrar en discusión porque es una figura geométrica... bueno, una figura geométrica con los otros triángulos que a la vista, pueden ser considerados como iguales, los triángulos.

I: ¿Cuáles triángulos podrían ser considerados como iguales ahí?

E: ¿Para ellos?

I: Sí. E: Los dos de arriba. Y los dos de abajo...

I: [Interrumpe] ¿Y son iguales o no son iguales?

E: Esos sí, pero tienen que ser todas las partes iguales. O sea, todos los triángulos que... capaz que estoy diciendo cualquier cosa, pero... todos los triángulos que están conformados en el interior del rectángulo no son iguales. Yo pienso que Víctor me la daría como válida. Que sembraría alguna duda de repente en Tere. Pero en Álvaro no.

1.7.1.9 Indicador: Dificultad en representaciones equivalentes presentes en las respuestas de los entrevistados (subdominio KoT)

Entrevistado 1

E: Que tengo, por ejemplo la torta, o un cuadrado dividido en cuatro porciones iguales y pinto tres. La segunda opción sería, de acuerdo a las figuras que tengo acá, buscar... no sé si diría el doble. Porque en realidad serían como buscar fracciones equivalentes tanto en la E como en la F.

E: En realidad, Tere lee las, por ejemplo la E y la F... bueno ahí ya se da cuenta que en la A y la C, las partes no son iguales. Que si bien está dividido en cuatro no son iguales, entonces no son tres cuartos. Y en la B y en la D sí. Lo que ella deja por fuera es la D y la F. Porque cuenta los cuadraditos, y no son tres cuartos. Al menos no así, expresados directamente. Lo que se podría hacer es llevarla por decirla así, o guiarla para que pueda ver si hay relación entre las fracciones, entre 18 sobre veinticuatroavos y seis octavos.

I: ¿Y por qué pensás que debe haber elegido la fracción por eso? ¿Está bien orientado? ¿Tiene el concepto de fracción de tres cuartos como fracción?

E: Como tener el concepto de tres cuartos como fracción sí, porque arriba lo establece. "Son tres cuartos porque está dividida en cuatro partes iguales y hay tres pintadas de gris". Es como la repetición del librito. Entiende bien, o sea, sabe que tienen que ser iguales las partes del todo. Y lo que está marcado es lo que indica el numerador o sea, en esas opciones es lo mismo que Tere. Pero ta, me confunde pila.

I: ¿Y dónde ves tú el conteo, ese conteo que me estás expresando? ¿En qué parte de su argumentación identificás que hay una especie de conteo?

E: ¿En la F o en la E?

I: En cualquiera de las dos.

E: En la E, cuando dice por ejemplo "hay tres líneas pintadas de gris, de las cuatro. Entonces son tres cuartos". Por ejemplo en esa parte. Y para la figura F dice, "son tres cuartos, porque si hacés así", "agrupando los rectángulos de dos en dos obtenes"... ta y ahí explica que obtenés distintos subgrupos. Pero ahí explica que los agrupa de dos en dos.

I: Y eso ¿Se puede hacer o no se puede hacer?

E: En realidad para lo que se pide en la consigna no... Está confundiendo los conceptos.

Entrevistado 2

E: Bien. En la primer respuesta de ella no intervendría. En la figura E... [Lee] Me dejó pensando de... me dejó pensando esta niña con el tema de la figura E. Porque si bien acá están divididos en 24, si yo tomo la fila, sí serían tres cuartos. Y ella lo tomó, cada pedacito como una unidad. Capaz que... yo trataría... yo como docente no hubiera puesto la imagen esta, porque puede generar eso. Porque en realidad, sí, ahí hay 24 partes, y sólo hay 18 pintadas.

I: ¿Entonces representa tres cuartos o no?

E: Y... si afino el ojo, no. No representa.

I: ¿Cómo corregirías vos la respuesta de Álvaro entonces?

E: El tema, es la cuestión de la E... que también el... Claro, la cuestión es el recurso. Yo ahí como que, [lee] "cada línea tiene seis cuadraditos, es decir todos son iguales. Y como hay tres líneas pintadas de gris, entonces son tres cuartos". Si eso es verdad, él ve, si él considera así yo se lo tendría que considerar como bien a eso.

E: Lo que pasa que yo... la E a mí también me está generando dudas. Porque si bien está dividido ahí, igual yo le daría la razón a Álvaro, me quedo con Álvaro. Me quedo con las respuestas de Álvaro

Entrevistado 3

E: Es que en realidad, como no tengo mucha noción, pero sigo su razonamiento. Yo cuanto conté las partes del E y del F me pasó lo mismo. Conté cuántos cuadraditos habían en total, y cuántos habían pintados. Igual, mirándolo, por ejemplo en la figura E... ahora que lo miro, puedo tomar también que está dividido en cuatro filas. Y en realidad sí, hay tres filas pintadas, de cuatro hileras de cuadraditos. Pero sí, si cuento los cuadraditos uno por uno, me pasó lo mismo. Conté 24 cuadraditos y solamente pintaba 18. No me cierra a tres cuartos. Y con la F me pasa lo mismo.

I: ¿Y por qué te pasa lo mismo con la F?

E: Bueno, en la F todavía es más claro. Porque ni siquiera lo puedo hacer por filas. Porque tengo tres filas por así decirlo, donde en la primera tengo tres pintadas y están rectas. Pero ya en la segunda tengo dos. Y en la tercera como que no defino... si cuento de arriba para abajo.

E: Digo que me identifico más con Tere, porque Tere identifica que hay 24 partes iguales y solamente 18 pintadas. Entonces no corresponde a los tres cuartos.

E: [...]Que por más que haya la misma cantidad de, vuelvo a la figura E. Por más que haya la misma cantidad de cuadraditos pintados, de las tres partes, de cuatro que hay, en realidad no corresponde numéricamente a los tres cuartos que se están pidiendo. Porque de 24, 18 no es una relación.

E: En realidad no habría que corregirla porque es el único que entiendo que hizo las respuestas bien. A medida que me las fuiste pasando, entiendo que me lo hiciste a propósito, de que en realidad es el único que lo explica bien. De hecho fue con la única respuesta que realmente entendí, cuál era el razonamiento correcto.

Entrevistado 4

E: En la E. Que la parte que está pintada de gris representaría los tres cuartos. Porque está dividido... viste que si vos contás las líneas está dividido, una línea, dos líneas, tres líneas, cuatro líneas. Que cada línea representa una parte de los tres cuartos, y que lo que pintaron fue tres cuartos, tres líneas de la figura.

[respuesta de Tere]

E: [...]Y que la E sí, es correcto lo que está diciendo porque está dividido en 24 partes, y sólo hay pintadas 18, o sea que no representa los tres cuartos que le estaría pidiendo la maestra que se fije en cada figura.

I: ¿O sea que para vos, la respuesta que da sobre la E y la F es correcta?

E: Si para el razonamiento que ella está haciendo sí.

[respuesta de Álvaro]

I: La E sí representa tres cuartos entonces

E: Claro, porque si nos ponemos a pensar que decíamos que tenían que estar en partes iguales, ahí están divididos en partes iguales.

Entrevistado 5

E: Con número menores, que tú puedas reducirla. Entonces depende de si ya han visto la equivalencia de las fracciones. Yo recurriría a ese concepto. Al de equivalencia. La invitaría que pasara a números. Que escribiera 18 veinticuatroavos y que encontrara, si hay una manera de reducirla, a ver si eso de pronto puede ayudarla a tener una respuesta distinta por ejemplo. Y en la F, también. Recurriría en la E y en la F, recurriría a que escribiera la fracción que ve. Aunque dice que son 6 rectángulos pintados. Ella no está concibiendo el todo que está ahí. El conjunto F digamos, no lo está concibiendo. Ahí yo recurriría por ejemplo al porcentaje. "¿Qué porcentaje de los rectángulos que están en F, crees que están pintado? ¿El cuánto por ciento de los rectángulos están pintados? "¿Qué crees Tere, que porcentaje de los rectángulos que ves ahí está pintado?

Entrevistado 6

E: Que la E, si sería una fracción, pero no es la que plantea, y por eso está bien. No serían tres cuartos pero si es una fracción. Y la F también, es una fracción, pero no sería... en realidad me genera una duda porque están separaditos. Pero como no tengo conocimiento respecto a eso no sé qué decirle.

I: Si fuera una equivalente entonces ¿no sería igual a tres cuartos?

E: Claro... pará... Pah. Me mataste. Pará... Si...

I: Y en la E, ¿qué te parece lo que responde para la E, en este caso Álvaro?

E: Me pasa lo mismo que la otra. Que capaz que sería un equivalente de tres cuartos capaz, lo que él pensó.

I: ¿Y entonces lo corregirías como correcto o como incorrecto? ¿Qué le dirías?

E: Que en realidad, creo yo, hace mucho que no veo fracciones, pero en realidad, está en lo correcto pero no es lo que se pide.

Entrevistado 7

E: Es decir, toma consciencia de que la unidad está repartida en 24. Pero no toma conciencia de que esos 18 sí están representando tres cuartos. Y lo mismo ocurriría con el F, que es creo lo que yo te decía al principio. Me parece que te lo dije. Que me quedaban dudas hasta a mí. Pero si yo quisiera calcular como... a ver capaz que lo estoy diciendo mal pero... yo sé que tres cuartos... o sea una fracción es un cociente de enteros. O sea que, si yo tengo que tomar 24... Si yo tengo que calcular los tres cuartos de 24, evidentemente me van a dar 18, si no estoy haciendo mal los cálculos. Entonces los 18 cuadraditos pintados sí están. No tiene claro, creo que... como es que se dice, no es "como cuenta" la expresión de la fracción, pero... no sabe calcular los tres cuartos de un número. De esos 18 me explico... de esos 24. Tendría que calcular 24, de... si, tres cuartos de 24.

E: Se lo daría correcto todo. Y la verdad que, la justificación que usa, y las... el razonamiento que hace, queda claro en el de este que te decía yo, en el E. Logra visualizar que la parte sombreada... esa explicación que él da, "si te fijás cada línea tiene seis cuadraditos". Que ni siquiera yo lo visualicé así. Yo pensé en 24 cuadrados, de entrada cuando fui a analizar dije "bueno tengo que calcular tres cuartos de 24, y 18 es..." El lo visualiza a través de la representación gráfica de forma correcta.

1.7.1.10 Indicador: Dificultad en representaciones discretas presentes en las respuestas de los propios entrevistados (subdominio KoT)

Entrevistado 1

I: De igual forma, por ejemplo, frente a la misma respuesta de Tere, algunas compañeras tuyas respondieron que en la F, no hay tres cuartos representados. ¿Qué pensás tú de eso?

E: Yo cuando vi la fracción, en realidad, lo primero que hice fue, como si fuera un niño o una niña, contar. Tengo ocho rectángulos, y hay seis pintados. Y ahí me di cuenta en realidad que son fracciones equivalentes. Tres cuartos, es equivalente a seis octavos.

I: Y el hecho de que estén separados esos rectángulos, ¿genera algo en esta equivalencia o da lo mismo como estén distribuidos gráficamente?.

E: No. Porque en octavos es menor que cuartos. Por eso los cuadrados son más pequeños.

I: O sea que si son octavos, los cuadraditos en los que dividís la unidad tienen que ser más chicos. ¿Esa es la idea?.

E: Si esa es la idea.

I: ¿Y el hecho de que estén separados? ¿Te parece que afecta en algo al tema de la representación tres cuartos, o es lo mismo?

E: [Pausa]... Ah, claro [Risas]. Porque en realidad estaba diciendo... ta igual todavía no lo visualizo bien, pero en realidad estaba diciendo que tengo que dividir a un todo en partes iguales. Y en esa figura en realidad no tengo a un todo en sí mismo. Tengo partes individuales. Cada una pintada.

I: ¿Y cuál sería tu todo ahí? ¿O cuál sería la unidad para que estén representados los tres cuartos, o no?

E: Si los junto.

I: Te animás a hacerme un dibujo de esa respuesta que me estás dando. ¿Cómo sería esto de "te los junto para que estén los tres cuartos representados"?

E: Bien [Dibuja]. Ahí te envié.

E: En la E, cuando dice por ejemplo "hay tres líneas pintadas de gris, de las cuatro. Entonces son tres cuartos". Por ejemplo en esa parte. Y para la figura F dice, "son tres cuartos, porque si hacés así", "agrupando los rectángulos de dos en dos obtenes"... ta y ahí explica que obtenés distintos subgrupos. Pero ahí explica que los agrupa de dos en dos.

I: Y eso ¿Se puede hacer o no se puede hacer?

E: En realidad para lo que se pide en la consigna no... Está confundiendo los conceptos.

Entrevistado 2

I: ¿Y en la F que te parece, según lo que dice Tere?

E: La F estoy de acuerdo con ella, no representa tres cuartos. A no ser que yo tratara de unir esos cuadraditos. Pero fah... son ocho [cuenta]. ¿Son ocho cuadraditos en la otra?

I: Ajá

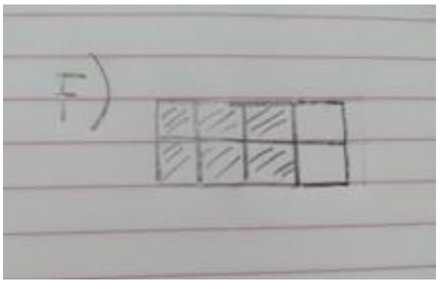
E: ¿Y hay cuantos coloreados? Si yo los contara, y los pusiera en columnas de a dos.

I: ¿Te animas a mandarme una foto de lo que estás dibujando?

E: Sí... si los junto sí.

I: ¿Y por qué te parece que habría que juntarlos?

E: Porque si mi objetivo es reconocer dónde está pintado tres cuartos, yo los juntaría. Que no me había dado cuenta de eso, hacerlo antes. Ya te mando. Eso también está muy asociado a como nosotros tenemos... 3. Ahí para reformular la F, yo seguiría el discurso. La F... "bueno Tere, pero si nosotros tratamos de unir esos rectángulos, ¿podríamos llegar a formar tres cuartos?" Y ahí la dejo a ella que trate de unir y construir como yo hice.



Entrevistado 3

[sugiere una representación discreta para 3/4]

E: Porque tiene cuatro partes que se supone que son iguales, y tiene pintada tres. O sea, siguiendo el razonamiento de Víctor. Yo no la elegiría porque yo entiendo que tiene que estar todo como dentro de una misma figura. O por lo menos es una de las interpelaciones que me han hecho. Porque por ejemplo, yo entiendo que hay cuatro partes, y que están pintadas tres... si sigo el razonamiento de Víctor. Y de hecho hay, cuatro partes, y tres solamente pintadas. La representé así, que es más o menos como la figura F, porque me ha pasado que en la escuela me dicen que no son porque "no están todos adentro de una misma figura". Por ejemplo del círculo, por ejemplo del rectángulo. Como que no está dividido. Si no que hay, como cuatro cuadraditos, o cuatro rectángulos. Me parece como sumamente interesante ese razonamiento. De que para que lo tenga que dividir, tenga que ser parte de una misma figura.

I: O sea que para ti esa no sería tres cuartos.

E: Sí. Yo entiendo que son tres cuartos. La dibujé porque me parece interesante en realidad cuando me hacen ese planteo. Yo entiendo que son tres cuartos.

E: Es que en realidad, como no tengo mucha noción, pero sigo su razonamiento. Yo cuanto conté las partes del E y del F me pasó lo mismo. Conté cuántos cuadraditos habían en total, y cuántos habían pintados. Igual, mirándolo, por ejemplo en la figura E... ahora que lo miro, puedo tomar también que está dividido en cuatro filas. Y en realidad sí, hay tres filas pintadas, de cuatro hileras de cuadraditos. Pero sí, si cuento los cuadraditos uno por uno, me pasó lo mismo. Conté 24 cuadraditos y solamente pintaba 18. No me cierra a tres cuartos. Y con la F me pasa lo mismo.

I: ¿Y por qué te pasa lo mismo con la F?

E: Bueno, en la F todavía es más claro. Porque ni siquiera lo puedo hacer por filas. Porque tengo tres filas por así decirlo, donde en la primera tengo tres pintadas y están rectas. Pero ya en la segunda tengo dos. Y en la tercera como que no defino... si cuento de arriba para abajo.

E: Porque en realidad en la figura seis hace el mismo razonamiento que en el E. Tenés ocho partes pintadas... ocho no... Sí ocho partes en total. Pero solamente tenés seis pintadas. Entonces no se corresponde a los tres cuartos. Si vos tuvieras en realidad ehh... de los ocho pintados, para que te diera los tres cuartos, tendrías que estar pintando... ehh... [Pausa]. No realmente no sé cuantos cuadraditos, pero no son seis.

[respuesta de Álvaro]

E: En realidad no habría que corregirla porque es el único que entiendo que hizo las respuestas bien. A medida que me las fuiste pasando, entiendo que me lo hiciste a propósito, de que en realidad es el único que lo explica bien. De hecho fue con la única respuesta que realmente entendí, cuál era el razonamiento correcto.

Entrevistado 4

E: Y la... cuando le pregunta la F, ella dice que tampoco "esos son seis rectángulos pintados". Claro no está representado los... son solo seis rectángulos, no representan los tres cuartos de cada figura. Para poder representar tres cuartos de cada figura tenía que haber...dividido cada rectangulito en cuatro. Y ahí sí pintar capaz que uno, y decía que si "bueno ta, del primer rectángulo están pintados tres cuartos". O haber representado solo cuatro triángulos y haber pintado tres.

I: ¿O sea que para vos, la respuesta que da sobre la E y la F es correcta?

E: Si para el razonamiento que ella está haciendo sí.

[respuesta de Álvaro]

E: Porque él lo que está haciendo es agrupando de a dos. Va agrupando. Dos, dos, dos, y los dos que no están pintados. Entonces decís. Bueno, pintados hay, si agrupo de a dos, hay tres partes. Y hay una parte que no está pintada. Entonces ahí podés decir que de la figura esa están representados los tres cuartos, si los agrupás de a dos. Si lo agruparíamos de a tres tendríamos que decir que no. Le tendríamos que preguntar si está pintado, tres... no porque me faltaría un cuadradito. Tres no podría ser. Sí, es una estrategia. El usó una estrategia que a mí nunca se me hubiera ocurrido hacerla así capaz. De agrupar de a dos

-----

I: Entonces la F ¿representaría tres cuartos para ti?

E: No. Para mí no sigue representando. Pero viendo la estrategia que él usa, tendría que decirle que sí que está bien en agrupar... que está correcto que los agrupe y que si los agrupa sí representa los tres cuartos. Pero si era separado como estaba yo diría que no.

E: La unidad que el cuenta son dos cuadraditos pintados. Agrupa de a dos. Los cuadraditos pintados los agrupa de a dos.

I: ¿El todo sería dos rectangulitos de esos que tendrían ahí?

E: Claro. Dos rectangulitos. Dos, dos y dos. Entonces él dice "tengo dos pintados, dos pintados, dos pintados, me quedan dos sin pintar. Tengo los tres cuartos."

E: El grupo de dos. La unión de dos. Viste cuando une los dos. Para él es... el todo es eso, cuando une de a dos. O sea, el uno de a dos y hace, "dos, dos, dos y dos". Entonces le quedan cuatro en total. Tres están pintados y dos sin pintar. O sea, el hace la unidad de a dos. El junta de a dos. Esa es su unidad. Su unidad va de a dos

Entrevistado 5

E: Con número menores, que tú puedas reducirla. Entonces depende de si ya han visto la equivalencia de las fracciones. Yo recurriría a ese concepto. Al de equivalencia. La invitaría que pasara a números. Que escribiera 18 veinticuatroavos y que encontrara, si hay una manera de reducirla, a ver si eso de pronto puede ayudarla a tener una respuesta distinta por ejemplo. Y en la F, también. Recurriría en la E y en la F, recurriría a que escribiera la fracción que ve. Aunque dice que son 6 rectángulos pintados. Ella no está concibiendo el todo que está ahí. El conjunto F digamos, no lo está concibiendo. Ahí yo recurriría por ejemplo al porcentaje. "¿Qué porcentaje de los rectángulos que están en F, crees que están pintado? ¿El cuánto por ciento de los rectángulos están pintados? "¿Qué crees Tere, que porcentaje de los rectángulos que ves ahí está pintado?"

I: ¿Y cuál sería la unidad en el F?

E: El conjunto de rectangulitos.

I: ¿Y a vos por qué te parece que sólo considera como unidad de a dos rectangulitos?

E: No no. La unidad del conjunto. El tiene, los rectangulitos para él, yo veo que él está como si fueran niños de una clase. El está armando. No está dividiendo una gran cosa. Si no está juntando, que es distinto. Está considerando muchas unidades chicas dentro de un gran conjunto. No está dividiendo nada, si no juntando.

Entrevistado 6

I: ¿Qué más le dirías a Tere? ¿Con lo demás que dice Tere con respecto a la E, a la F, estás de acuerdo?

E: [Pausa]. Si estoy de acuerdo si.

E: Que la E, si sería una fracción, pero no es la que plantea, y por eso está bien. No serían tres cuartos pero si es una fracción. Y la F también, es una fracción, pero no sería... en realidad me genera una duda porque están separaditos. Pero como no tengo conocimiento respecto a eso no sé qué decirle.

I: ¿Cuál sería la fracción?

E: Seis... ¿octavos? [Cuenta susurrando cuadraditos]. Sí, seis octavos.

E: Bueno... ahora me generaste un conflicto. Porque en realidad lo que hizo Álvaro fue hacer tipo como de, de la cantidad de números que tenía fue como haciendo fracciones más chiquitas. Por ejemplo en la F... [Lee una vez más]. Claro. Como que hizo equivalencias por ejemplo en la F. No sé si la palabra es equivalencia, pero como que de una fracción buscó la equivalente y que estaba ahí en lo que le marcó la maestra. Pero en realidad yo ponele, esta actividad no era para hacer eso. Ponele, si hubiera otra actividad que dice "busca equivalencias", capaz que sí. Acá no está buscando equivalentes. Lo que está representado dice que hay que buscar tres cuartos. Pero no sé si lo que él hizo está bien.

I: Entonces, en conclusión. ¿Está correcto lo que hizo para la F o no está correcto?

E: En realidad yo creo, no me acuerdo, que sí está correcto pero no es lo que pide.

I: Si fuera una equivalente entonces ¿no sería igual a tres cuartos?

E: Claro... pará... Pah. Me mataste. Pará... Si...

E: Mucho no me acuerdo, no sé si la palabra es múltiplo, pero el marcó... como el marcó tres grupitos de dos, que en realidad es un múltiplo de la fracción de tres cuartos lo que él hizo. No sé si me explico.

I: Capaz que explica un poquito más la idea de "múltiplo"- ¿Qué significa que sea múltiplo de la fracción? E: Claro. Que si en realidad vos seguís, no sé si la palabra es como, multiplicando por sí misma, podés llegar a la fracción que él hizo, que son... perá... Claro como que en realidad. Lo que pasa que, no entiendo porqué marcó de a dos. Supongo que él quería llegar a tres cuartos. Pero no sé porqué las marcó de a dos.

Entrevistado 7

E: Es decir, toma consciencia de que la unidad está repartida en 24. Pero no toma conciencia de que esos 18 sí están representando tres cuartos. Y lo mismo ocurriría con el F, que es creo lo que yo te decía al principio. Me parece que te lo dije. Que me quedaban dudas hasta a mí. Pero si yo quisiera calcular como... a ver capaz que lo estoy diciendo mal pero... yo sé que tres cuartos... o sea una fracción es un cociente de enteros. O sea que, si yo tengo que tomar 24... Si yo tengo que calcular los tres cuartos de 24, evidentemente me van a dar 18, si no estoy haciendo mal los cálculos. Entonces los 18 cuadraditos pintados sí están. No tiene claro, creo que... como es que se dice, no es "como cuenta" la expresión de la fracción, pero... no sabe calcular los tres cuartos de un número. De esos 18 me explico... de esos 24. Tendría que calcular 24, de... si, tres cuartos de 24. Y creo que ocurriría lo mismo con el F

E: Lo mismo hace en la F. Se da cuenta que agrupando de a dos cuadraditos, se representaría el cuarto. Entonces dice "hay tres conjuntos", dice ahí "agrupando los rectángulos dos en dos, obtienes cuatro grupos". Ahí logra delimitar que se representa los cuatro cuartos. Y te dice que hay uno, dos y tres. Quiere decir que logra identificar los tres grupitos de dos cuadrados que representarían los tres cuartos de la unidad.